# **Міністерство освіти і науки України**

# **Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича**

Факультет математики та інформатики

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Декан Ольга МАРТИНЮК

“\_\_\_” \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2020 р.

## ***Програма***

**державного іспиту зі спеціальності**

для спеціальностей:

111 Математика,

рівень вищої освіти – перший (бакалаврський),

денна форма навчання

014 Середня освіта,

предметна спеціальність 014.04 «Середня освіта (математика)»,

рівень вищої освіти – перший (бакалаврський),

денна та заочна форми навчання

Схвалено Вченою радою факультету математики та інформатики

протокол № 8 від „ 6 ” квітня 2020 р.

Голова ради Ольга МАРТИНЮК

Схвалено методичною радою факультету математики та інформатики

протокол № 3 від „ 16 ” жовтня 2020 р.

Голова методичної ради Ольга МАРТИНЮК

Чернівці – 2020

**Математичний аналіз**

1. Границя числової послідовності. Властивості збіжних послідовностей. Теорема про збіжність монотонної послідовності та принцип вкладених відрізків. Число е.
2. Критерій Коші збіжності числової послідовності.
3. Границя функції. Чудові границі. Правила знаходження границь функцій.
4. Теореми про неперервні функції (збереження знаку, проходження через нуль, обмеженість та досягнення екстремальних значень на відрізку).
5. Рівномірна неперервність функції та теорема Кантора.
6. Похідна і диференціал функції однієї дійсної змінної: означення і геометричний зміст. Правила диференціювання. Важливі границі та похідні від основних елементарних функцій.
7. Теореми про диференційовні функції (Ферма, Ролля, Лагранжа і Коші) та їх застосування (критерій сталості, умова монотонності, правила Лопіталя).
8. Формула Тейлора для функції однієї змінної із залишковим членом у формі Пеано, Лагранжа і Коші.
9. Локальні екстремуми функції однієї змінної: необхідні й достатні умови. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції на відрізку.
10. Невизначений інтеграл і таблиця інтегралів. Заміна змінної та інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.
11. Означення визначеного інтеграла (інтеграла Рімана), суми Дарбу та критерій інтегровності.
12. Неперервність та диференційовність інтеграла зі змінною верхньою межею. Формула Ньютона-Лейбніца.
13. Збіжний числовий ряд та його сума. Нескінченна геометрична прогресія. Необхідна умова збіжності числового ряду. Критерій Коші збіжності числового ряду.
14. Узагальнений гармонійний ряд. Ознаки порівняння збіжності додатних рядів, Коші, Д’аламбера.
15. Степеневі ряди та область їх збіжності. Формула Коші-Адамара.
16. Абсолютна та умовна збіжності числових рядів. Ознака Лейбніца збіжності знакозмінного ряду та оцінка його залишку.
17. Поточкова і рівномірна збіжність функціональних послідовностей та рядів. Критерій Коші та ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності.
18. Інтегрування та диференціювання функціональних рядів.
19. Невласні інтеграли І-го та 2-го роду.
20. Функції багатьох змінних, неперервність та диференційованість функції багатьох змінних. Теорема про рівність мішаних похідних.
21. Формула Тейлора та екстремум функції багатьох змінних.
22. Подвійні і потрійні інтеграли. Заміна змінних в подвійних, потрійних інтегралах. Застосування подвійних, потрійних інтегралів для розв’язання фізичних та геометричних задач.
23. Власні та невласні інтеграли залежні від параметра. Теореми про диференціювання та інтегрування інтегралів за параметром інтегралів. Гамма-функція, Бета-функція.
24. Криволінійні інтеграли першого та другого роду, їх обчислення, зв'язок між ними.
25. Формули Гріна і Остроградського.
26. Ряди Фур’є. Розклад функції в ряд Фур’є.

**Комплексний аналіз**

1. Аналітичні функції комплексної змінної. Умови Коші-Рімана-Ейлера-Даламбера.
2. Інтегральна формула Коші.
3. Розклад аналітичних функцій в ряди Тейлора та Лорана. Розклади основних елементарних функцій.
4. Лишки функцій комплексної змінної та їх властивості. Застосування лишків до обчислення інтегралів.
5. Теорема Ліувілля про цілі функції та її застосування до доведення основної теореми алгебри.

**Функціональний аналіз**

1. Метричні простори. Приклади метричних просторів: , , , . Повні метричні простори.
2. Принцип стискаючих відображень та його застосування.
3. Теорема про вкладені кулі. Теорема Бера.
4. Нормовані та банахові простори. Обмежений лінійний оператор та його норма.
5. Поточково та рівномірно обмежена сім’я операторів. Принцип рівномірної обмеженості.
6. Продовження лінійних функціоналів та теорема Гана-Банаха.
7. Теорема Банаха про обернений оператор.
8. Гільбертові простори. Тотожність паралелограма і теорема Ріса про загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів на гільбертовому просторі.

**Рівняння з частинними похідними**

1. Класифікація та зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку.
2. Задача Коші для рівняння коливання нескінченної струни: постановка, розв’язання методом характеристик, коректність, принцип Дюамеля.
3. Задача Коші для хвильового рівняння: формула Кірхгофа, метод спуску Адамара.
4. Загальна схема методу відокремлення змінних розв’язання задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку. Властивості власних чисел і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля.
5. Вивчення вільних і вимушених коливань обмеженої струни із закріпленими кінцями методом відокремлення змінних. Існування розв’язку.
6. Єдиність та неперервна залежність від початкових даних розв’язків мішаних задач для гіперболічних рівнянь.
7. Розв’язування першої мішаної задачі для рівняння теплопровідності. Принцип максимуму для рівняння теплопровідності та його застосування до встановлення єдності та неперервної залежності розв’язку першої мішаної задачі від даних.
8. Розв’язування задачі Коші для рівняння теплопровідності методом перетворення Фур’є. Встановлення коректності задачі Коші в класі неперервних та обмежених функцій.
9. Застосування методу відокремлення змінних до розв’язування крайових задач для рівняння Лапласа в крузі, в кільці та зовні круга.
10. Означення та властивості гармонічних функцій. Принцип максимуму для гармонічних функцій та наслідки з нього.

**Варіаційне числення і методи оптимізації**

1. Найпростіша задачі варіаційного числення. Рівняння Ейлера. Необхідні та достатні умови слабого і сильного екстремуму.
2. Варіаційні задачі з рухомими межами. Умови трансверсальності.
3. Ламані екстремалі. Умова Веєрштрасса-Ердмана.
4. Ізопериметричні задачі. Існування розв’язку.

**Теорія ймовірностей**

1. Класичне означення ймовірності. Аксіоматика Колмогорова теорії ймовірностей.
2. Залежні та незалежні випадкові події. Умовна ймовірність. Формули множення ймовірностей.
3. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.
4. Означення неперервної випадкової величини (НВВ). Функція та щільність розподілу НВВ, їх властивості.
5. Основні числові характеристики НВВ (математичне сподівання, дисперсія, мода, медіана, початкові та центральні моменти). Їх властивості.
6. Закон великих чисел. Нерівність Чебишова. Центральна гранична теорема (теорема Ляпунова – без доведення).

### **Аналітична геометрія**

1. Види рівнянь прямої лінії на площині.
2. Види рівнянь прямої лінії в просторі.
3. Види рівнянь площини.
4. Взаємне розміщення прямих в просторі, заданих своїми канонічними рівняннями.
5. Канонічне рівняння еліпса, гіперболи і параболи. Директриси еліпса, гіперболи і параболи. Ексцентриситет.

##### **Диференціальна геометрія і топологія**

1. Кривина лінії. Скрут. Обчислювальні формули для кривини та скруту.
2. Тригранник Френе. Формули Френе.
3. Топологічна структура. Класифікація точок та множин топологічного простору.
4. Неперервні відображення, їх властивості. Відкриті та замкнені відображення (основні твердження).
5. Топологічні відображення, їх властивості.

#### **Алгебра і теорія чисел**

1. Система лінійних рівнянь з n змінними. Розв'язок системи. Різні методи знаходження розвʼязків системи: метод Гаусса, теорема Крамера, теорема Кронекера Капелі, матричний спосіб.
2. Фундаментальна система розв’язків однорідної системи лінійних рівнянь. Загальний розв’язок однорідної та неоднорідної системи рівнянь. Зв'язок між розв'язками неоднорідної та приєднаної однорідної систем лі­ній­них рівнянь.
3. Комплексні числа: алгебраїчна та тригонометрична форми запису комплексного числа. Дії над комплексними чис­ла­ми в алгебраїчній та тригонометричній формах. Формула Муавра. Корінь натурального степеня з комплексного числа.
4. Многочлени від однієї змінної. Дії над ними. Тео­ре­ма про ді­­лення многочленів з ос­та­­чею.
5. Дільники многочлена. Спі­ль­­­ні дільники двох многочленів. Найбільший спі­ль­­ний діль­ник двох мно­гочленів. Алго­ритм Евкліда.
6. Корінь многочлена. Теорема Безу. Кратні ко­рені.Схе­ма Горнера та її застосування до зна­ход­жен­ня зна­чення многочлена та йо­го похідних в точці, до роз­кладу многочлена за степенями (x-a).
7. Основна теорема алгебри про існування коренів многочлена від однієї змін­ної. Роз­клад многочлена на множ­ни­ки. Формули Вієта.
8. Квадратична форма. Канонічний та нормальний вигляди квадратичної форми. Закон інерції дійсних квадратичних форм.
9. Скінченновимірний лінійний простір. База простору. Зв’язок між різними базами.
10. Лінійний простір ‒‒ означення та властивості. Приклади. Ізоморфізм лінійних просторів.
11. Лінійний оператор в лінійному просторі. Матриця лінійного оператора.
12. Евклідовий простір ‒‒ означення та властивості. Ортонормовані бази, їх існування. Процес орто­го­на­лізації.
13. Група, абелева група ‒‒ означення та властивості. Приклади. Гомоморфізм та ізоморфізм груп.
14. Кільце, поле ‒‒ означення та властивості. Приклади. Ізоморфізми кілець та полів.

### **Диференціальні рівняння**

1. Поняття рівняння, розв’язку, інтеграла. Основні типи інтегровних рівнянь першого порядку: рівняння з відокремленими змінними, лінійні, в повних диференціалах.
2. Формулювання теореми про існування та єдиність розв’язку задачі Коші для рівняння . Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку. Поняття про фундаментальну систему розв’язків , вронскіан, конструкція загального розв’язку.
3. Розв’язання однорідних і неоднорідних лінійних рівнянь n-го порядку зі сталими коефіцієнтами .

**Методика викладання математики**

1. Методика вивчення границі і неперервності функцій у закладах загальної середньої освіти (ЗЗСО). Інтуїтивні і точні поняття.
2. Математичні поняття і методика їх вивчення. Первісні і означувальні поняття. Способи введення понять.
3. Математичні твердження. Теорема. Структура теореми. Види теорем. Необхідні, достатні, необхідні і достатні умови. Наведіть приклади.
4. Методи доведення теорем, проілюструвати на конкретних прикладах. Методика навчання учнів доведень теорем.
5. Координатний метод в курсі геометрії ЗЗСО.
6. Методика вивчення теми „Похідна функції” в курсі математики ЗЗСО.
7. Аксіоматики в курсі геометрії ЗЗСО.
8. Математика в ЗЗСО як навчальний предмет. Цілі навчання математики в ЗЗСО.
9. Методи навчання математики в ЗЗСО.
10. Внутрі- та міжпредметні зв’язки у математиці.
11. Функції задач у навчанні математики та їх види.
12. Урок математики. Підготовка вчителя до уроку. Конспект уроку та вимоги до нього.
13. Аналіз уроку.
14. Система тестування як засіб педагогічної діагностики успішності й розвитку учнів при вивченні математики.
15. Кабінет математики в ЗЗСО та його функції.
16. Використання нових інформаційних технологій навчання математики.
17. Навчальне обладнання з математики і методика його використання.
18. Специфіка навчання математики в ЗЗСО у класах з поглибленим її вивченням.
19. Позакласна робота з математики.
20. Факультативні курси з математики та форми їх організації.
21. Поняття нерівності з одним невідомим. Розв’язок нерівності. Класифікація нерівностей. Системи та сукупності нерівностей. Рівносильність і логічне слідування.
22. Метод геометричних перетворень в геометрії ЗЗСО.
23. Методика вивчення алгебраїчних і трансцендентних функцій у курсі математики ЗЗСО.
24. Методика розв’язування геометричних задач на побудову з допомогою циркуля і лінійки.
25. Поняття функції в сучасному курсі математики ЗЗСО. Різні підходи до означення поняття функції, методика формування поняття функції.
26. Поняття рівняння та його розв’язку. Класифікація рівнянь. Системи та сукупності рівнянь. Рівносильність і логічне слідування.
27. Означення та основні властивості тригонометричних функцій, їх графіки.
28. Означення та основні властивості обернених тригонометричних функцій, їх графіки.
29. Теорема Чеви та її застосування.
30. Вираження висот, медіан трикутника через його сторони.
31. Вираження бісектрис трикутника через його сторони.
32. Вираження радіусів вписаного та описаного кіл трикутника через його сторони.
33. Взаємне розташування висоти, медіани та бісектриси у трикутнику.
34. Вираження сторін та площі трикутника через його медіани та висоти.
35. Теорема Карно та її застосування.
36. Критерій вписаного кола в чотирикутник та описаного кола навколо чотирикутника.
37. Теорема Брахмагупта.
38. Звичайні та десяткові дроби.
39. Елементи алгебри та геометрії в курсі математики 5-6 класів ЗЗСО.

**Тематика задач практичної частини**

**Математичний аналіз**

1. Похідна функції однієї змінної. Застосування похідної до розв’язування задач геометрії та механіки.
2. Екстремум функції однієї змінної.
3. Визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла для обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги лінії, об’єму тіла.
4. Екстремум функції багатьох змінних, умовний екстремум.
5. Диференціювання і інтегрування функціональних рядів.
6. Криволінійні, поверхневі, подвійні і потрійні інтеграли. Їх обчислення та застосування до розв’язування геометричних та фізичних задач.
7. Власні та невласні інтеграли залежні від параметра, їх обчислення.
8. Інтеграли Ейлера.

**Аналітична геометрія**

1. Векторний, мішаний та подвійний векторний добуток векторів.
2. Пряма і площина у просторі.
3. Лінії другого порядку, задані канонічними рівняннями.

**Лінійна алгебра**

1. Обернена матриця. Ранг матриці.
2. Метод Гауса та правило Крамера розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
3. Квадратичні форми. Зведення квадратичної форми канонічного та нормального виглядів.
4. Процес ортогоналізації.

**Теорія функції комплексної змінної**

1. Інтегрування функції комплексної змінної. Інтегральна формула Коші.
2. Степеневі ряди. Ряди Лорана.
3. Лишки та їх застосування до обчислення інтегралів.

**Диференціальні рівняння**

1. Інтегровані типи диференціальних рівнянь першого порядку.
2. Рівняння, що допускають зниження порядку.
3. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Рівняння Ейлера.
4. Неоднорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
5. Крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь. Функція Гріна.

**Диференціальні рівняння з частинними похідними**

1. Задача Коші для рівняння коливання струни.
2. Вільні та вимушені коливання закріпленої струни.
3. Задача Коші та крайові задачі для рівняння теплопровідності.
4. Крайові задачі для рівняння Лапласа в крузі, зовні круга і кільці.

**Варіаційне числення та методи оптимізації**

1. Простіша варіаційна задача. Узагальнення простішої варіаційної задачі.
2. Ізопериметричні задачі.
3. Варіаційні задачі з рухомими кінцями.
4. Ломані екстремалі.