В. В. Городецький, О. В. Мартинюк

Параболічні псевдодиференціальні рівняння з аналітичними символами у просторах типу S

Монографія

Чернівці
Технодрук
2019

УДК 517.955+517.956
ББК 22.161.62
Г701

Друкується за ухвалою Вченої ради факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (протокол № 8 від 11.06.2019 р.)

Рецензенти:
Слюсарчук В. Ю. – член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне.);
Пукальський І.Д. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Городецький В. В., Мартинюк О. В.

Г701 Параболічні псевдодиференціальні рівняння з аналітичними символами у просторах типу S : Монографія. – Чернівці: Технодрук, 2019. – 279 с.

ISBN ____

Досліджуються коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу з аналітичними символами в узагальнених просторах типу S, властивості розв'язку зазначеної задачі, зокрема поведінка розв'язку при необмеженому зростанні часового параметра.

Для наукових працівників, викладачів ЗВО, аспірантів і студентів, які спеціалізуються в галузі диференціальних рівнянь і математичного аналізу.

УДК 517.955+517.956
ББК 22.161.62

ISBN ________

Зміст

Вступ

Псевдодиференціальні оператори (ПДО) та рівняння з псевдодиференціальними операторами тісно пов'язані з важливими задачами аналізу, сучасної математичної фізики, теорією ймовірностей, теорією фракталів, квантовою теорією поля. До класу псевдодиференціальних операторів належать диференціальні оператори, оператори дробового диференціювання та інтегрування, згортки, тощо.

Широкий клас ПДО формально можна подати у вигляді $A = I^{-1}_{\sigma\to x}[a(t,x;\sigma)I_{x\to\sigma}]$, $\{x,\sigma\} \subset \mathbb{R}$, $t > 0$, де a – символ оператора A, що задовольняє певні умови, I, I^{-1} – пряме та обернене перетворення Фур'є або Бесселя. Якщо символ a є цілою, парною функцією аргумента σ, то еволюційні рівняння з оператором A містять також сингулярні диференціальні рівняння, зокрема, рівняння з оператором Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu+1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$, який у своїй структурі містить вираз $1/x$ і формально зображується у вигляді $B_\nu = F^{-1}_{B_\nu}[-\sigma^2 F_{B_\nu}]$, де F_{B_ν} – інтегральне перетворення Бесселя. Якщо $a(t,x;\sigma) \equiv P(t,x;\sigma)$, де P – поліном змінної σ при фіксованих t, x, який задовольняє умову "параболічності", то такі рівняння належать до параболічних рівнянь, якщо $I_{x\to\sigma} = F$ – перетворення Фур'є, або до B-параболічних рівнянь, якщо $I_{x\to\sigma} = F_{B_\nu}$; B-параболічні рівняння вироджуються на межі й за своїми внутрішніми властивостями близькі до рівномірно параболічних рівнянь.

Теорія лінійних параболічних та B-параболічних рівнянь з частинними похідними бере свій початок із дослідження рівняння теплопровідності. Класична теорія задачі Коші та крайових задач для таких рівнянь і систем рівнянь побудована в працях І.Г. Петровського, С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, М.І. Матійчука, М.В. Житарашу, А. Фрідмана, С. Теклінда, В.О. Солонникова, І.А. Кіпріянова, В.В. Катрахова, В.В. Крехівського, В.П. Лавренчука та ін. Задача Коші з початковими даними з просторів узагальнених функцій типу розподілів та ультрарозподілів вивчалася Г.Є. Шиловим, Б.Л. Гуревичем, М.Л. Горбачуком, В.І. Горбачук, О.І. Кашпіровським, С.Д. Івасишеним, Я.І. Житомирським, В.В. Городецьким, О.Г. Возняк, В.А. Літовченком та ін.

Дослідженням задачі Коші для еволюційних рівнянь з ПДО займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи (M. Nagase, R. Shinkai, C. Tsutsumi, М.А. Шубін, М. Тейлор, Л. Хермандер, А.Н. Кочубей, Ю.А. Дубінський, Б.Й. Пташник та ін.). Одержані важливі результати про розв'язність задачі Коші в різних функціональних просторах. При цьому часто початкові функції мають особливості в одній або декількох точках і допускають регуляризацію у певних просторах узагальнених функцій типу розподілів Соболєва-Шварца, ультрарозподілів, гіперфункцій та ін. Отже, задача Коші для зазначених рівнянь має природну постановку і в класах узагальнених функцій скінченного та нескінченного порядків.

Узагальненням задачі Коші є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкова умова $u(t,\cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f, \tag{0.1}$$

де $t_0 = 0$, $\{t_1, ..., t_m\} \subset (0, T]$, $0 < t_1 < t_2 < ... < t_m \leq T$, $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = ... = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші); умова (0.1) трактується в класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f – узагальнена функція, тобто як граничне співвідношення $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k \lim\limits_{t \to t_k} \langle u(t,\cdot), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ для довільної функції φ з основного простору (тут $< f, \cdot >$ позначає дію функціонала f на основну функцію).

Нелокальні за часом задачі належать до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів і задач практики, описі всіх коректних задач для конкретного оператора, при побудові загальної теорії крайових задач. Дослідженням нелокальних крайових задач у різних аспектах займалося багато математиків (О.О. Дезін, В.К. Романко, С.Г. Крейн, В.М. Борок, А.Н. Нахушев, А.Х. Мамян, Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, В.І. Чесалін, А.Л. Скубачевський та ін.), при цьому одержано важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, дослідженні питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів операцій, сформульовані умови регулярності та нерегулярності крайових задач для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь. Нелокальну багатоточкову за часом задачу для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами, побудованими за точково-негладкими однорідними символами, досліджували Я.М. Дрінь, В.В. Городецький, О.В. Мартинюк, О.М. Ленюк, Д.І. Спіжавка, та ін. У той же час, нелокальна m – точкова за часом задача не досліджена у випадку еволюційних рівнянь з ПДО, що діють в просторах типу S, символами яких є функції, що допускають аналітичне продовжння у всю комплексну площину і задовольняють певну умову "параболічності", а f в умові (0.1) – елемент простору типу S' – простору, топологічно спряженого з простором типу S.

Зазначимо, що простори типу S часто використовуються при дослідженні проблеми про класи єдності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними і складаються з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, поведінка яких та їхніх похідних на дійсній осі характеризується величинами $m_{kn} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |x^k\varphi(n)(x)|$, $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$, де подвійна послідовність $\{m_{kn}\}$ задовольняє певні умови. Найбільш повно І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим досліджено випадок $m_{kn} = k^{k\alpha} n^{n\beta}$, $\alpha, \beta > 0$; простори типу S в цьому випадку позначаються символом S_{α}^{β} і складаються з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які разом з усіма своїми похідними при $|x| \to +\infty$ спадають швидше, ніж $\exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, a > 0, x \in \mathbb{R}$.

У зв'язку з цим для подальших досліджень важливими є такі питання: 1) розвиток теорії нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t = Au(t,x), \quad t \in (0,T], \quad 0 < T \le +\infty, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{0.2}$$

з псевдодиференціальним оператором $A = I^{-1}_{\sigma \to x}[a(\sigma) I_{x \to \sigma}]$, де I – перетворення Фур'є або Бесселя, оператор A діє в узагальнених просторах типу S, які є індуктивними границями зліченно-нормованих просторів нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій і будуються за послідовностями $\{a_k\}, \{b_n\}$ додатних чисел, що задовольняють певні умови;

2) розвинення методики дослідження фундаментального розв'язку зазначеної багатоточкової задачі для рівняння (0.2);

3) відшукання умов, при виконанні яких псевдодиферецiальний оператор A можна розуміти як оператор диференціювання або оператор Бесселя нескінченного порядку вигляду

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D_x^k, \text{або } A = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} B_{\nu}^k,$$

якщо $a(\sigma) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \sigma^k$ чи $a(\sigma) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{2k} \sigma^{2k}$.

До рівнянь параболічного типу, коефіцієнти яких необмежено зростають при $|x| \to +\infty$, відноситься еволюційне рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t + Au(t,x) = 0, \quad t \in (0,\infty), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{0.3}$$

де $A = -d^2/dx^2 + x^2$ – гармонійний осцилятор – невід'ємний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$. М.Л. Горбачуком, В.І. Горбачук, О.І. Кашпіровським доведено, що розв'язок рівняння (0.3) завжди має граничне значення $u(0,\cdot) = \lim\limits_{t\to+0} u(t,\cdot)$ в просторі узагальнених функцій типу S' і за ним однозначно відновлюється. У працях М.Л. Горбачука, П.І. Дудникова, С.Д. Івасишена, Л.М. Андросової, О.Г. Возняк, В.В. Городецького, І.І. Дрінь та ін. доведено, що простори типу S' є множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними параболічного типу (до яких відноситься і рівняння (0.3)), при яких розв'язки є нескінченно диференційовними за просторовою змінною функціями. Н.М. Шевчук, А.О. Широковських аналогічні результати отримані у випадку рівняння $\partial u/\partial t + \varphi(A)u = 0$, де $\varphi(A)$ – ціла функція оператора A, де A – гармонійний осцилятор. Нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння

$$\partial^2 u(t,x)/\partial t^2 + \varphi(A)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}, \quad (0.4)$$

не досліджена. Отже, природним є питання про одержання для рівняння (0.4) результатів, аналогічних до встановлених у випадку рівняння $\partial u/\partial t + \varphi(A)u = 0$.

Ця книга, яка складається з п'яти розділів, присвячена розв'язанню вказаних проблем. **Перший розділ** має допоміжний характер. У ньому наведено огляд праць, які мають відношення до результатів, наведених у цій книзі, є близькими за змістом і методами досліджень.

У розділі 2, який складається з чотирьох підрозділів, встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з псевдодиференціальним оператором, який діє в узагальнених просторах типу S і символом якого є ціла функція, що задовольняє певну умову – аналог умови параболічності для рівнянь з частинними похідними. У підрозділі 2.1 наведено певні допоміжні факти, які стосуються топологічної структури узагальнених просторів типу S, властивостей функцій та основних операцій. У підрозділі 2.2 наведено результати, які стосуються структури та властивостей фундаментального розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі для зазначеного рівняння, доведено коректну розв'язність такої задачі у випадку, коли початкова функція є елементом простору узагальнених функцій типу S', дається зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою функцією. У підрозділі 2.3 вивчено питання про стабілізацію до нуля розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі в просторі узагальнених функцій типу S', а також питання рівномірної стабілізації до нуля на $\mathbb{R}$ такого розв'язку. У підрозділі 2.4 отримані результати, аналогічні сформульованим раніше у випадку, коли псевдодиференціальний оператор в еволюційному рівнянні діє в просторі $S_{1-\alpha}^{\alpha}$, де $\alpha \in (0,1)$ – фіксований параметр.

У розділі 3 доведено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для диференціально-операторного рівняння другого порядку з гармонійним осцилятором та функціями від такого оператора у випадку, коли початкова функція є елементом простору узагальнених функцій типу S' і ототожнюється з певним формальним рядом Фур'є-Ерміта. У підрозділі 3.1 наведено означення просторів основних та узагальнених елементів, пов'язаних з невід'ємним самоспряженим оператором, описується їх топологічна структура. У підрозділі 3.2 наведено основні поняття та означення, пов'язані з функціями Ерміта та формальними рядами Фур'є-Еміта. Підрозділ 3.3 стосується операційного числення, пов'язаного з гармонійним осцилятором. Основний результат підрозділу 3.4 складає теорема про коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння другого порядку з оператором $\varphi(A)$, де $\varphi(A)$ – ціла функція від гармонійного осцилятора за умови, що початкова функція є елементом простору узагальнених функцій типу

S'.

У розділі 4 досліджено нелокальну багатоточкову за часом задачу для еволюційного рівняння з оператором Бесселя нескінченного порядку, який діє в узагальнених просторах типу S. У підрозділі 4.1 встановлені властивості перетворення Бесселя основних та узагальнених просторів типу S та типу S', згорток, згортувачів та мультиплікаторів. У підрозділах 4.2, 4.3 доведено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для зазначеного еволюційного рівняння, досліджено властивості фундаментального розв'язку такої задачі, дається зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу S'. У підрозділі 4.4 досліджено властивості розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі для одного модельного еволюційного рівняння, яке містить степінь оператора Бесселя.

У **розділі 5** досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння $\dfrac{\partial u}{\partial t} = A_\varphi u$ з псевдодиференціальним оператором A_φ з аналітичним символом φ у просторах типу W, що задовольняє умову "параболічності" (оператор A_φ можна розуміти як оператор диференціювання нескінченного порядку). Встановлено властивості фундаментального розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі для зазначеного рівняння, доведено коректну розв'язність задачі у півпросторі $t > 0$ у випадку, коли початкова функція є елементом простору узагальнених функцій типу W', знайдено аналітичне зображення розв'язку, досліджено поведінку розв'язку $u(t, \cdot)$ при $t \to +\infty$ в просторі типу W' (підрозділ 5.2). У підрозділі 5.3 досліджено нелокальну m-точкову за часом задачу для рівняння $\partial u/\partial t = A_\varphi u$ з псевдодиференціальним оператором A_φ, побудованим за змінним символом за допомогою перетворення Фур'є. Дається означення фундаментального розв'язку та досліджуються властивості ФРБЗ. Доведено розв'язність багатоточкової задачі в класі обмежених неперервних на $\mathbb{R}$ функцій.

Відзначимо, що результати розділів 2–4 отримані В.В. Городецьким спільно з А.П. Вережак, а результати п.п. 5.3 розділу 5 належать В.В. Городецькому та О.А. Широковських.

Результати, наведені в книзі, можуть бути використані при читанні вибіркових курсів студентам математичних спеціальностей, при виконанні курсових та магістерських робіт, у науковій роботі аспірантів та викладачів закладів вищої освіти, які спеціалізуються в галузі диференціальних рівнянь та математичного аналізу.

Розділ 1. Огляд літератури

У цьому розділі зроблено огляд праць, які мають відношення до результатів, наведених у цій книзі, є близькими за змістом та методами досліджень.

У підрозділі 1.1 наведено результати, які стосуються теорії задачі Коші та крайових задач для сингулярних параболічних рівнянь і систем. Підрозділ 1.2 містить огляд праць, присвячених дослідженням задачі Коші для абстрактних диференціально-операторних рівнянь першого порядку. Аналіз робіт, присвячених задачі Коші для псевдодиференціальних рівнянь і систем як з гладкими, так і негладкими символами дається у підрозділі 1.3. У підрозділі 1.4 наведено огляд праць, в яких досліджується задача Коші для рівнянь з частинними похідними нескінченного порядку. Аналіз результатів, що стосуються нелокальних задач для диференціально-операторних рівнянь та рівнянь з частинними похідними, викладено у підрозділі 1.5.

1.1. Задача Коші та крайові задачі для сингулярних параболічних рівнянь і систем

Лінійними сингулярними системами диференціальних рівнянь називаються системи, серед коефіцієнтів яких є такі, що необмежені в деякій області з $\mathbb{R}^n$ [1]. До таких систем відносяться і системи рівнянь з диференціальним оператором Бесселя через наявність у його структурі виразу $1/x$. Системи та рівняння з оператором Бесселя виникають при вивченні температурних полів у симетричних середовищах, використовуються при побудові математичних моделей дифузійних процесів у анізотропних середовищах, описують явища тепломасообміну, радіальні коливання хвиль, зустрічаються у кристалографії, гідродинаміці та в задачах про взаємодію тіл [2–4].

Дослідженню задачі Коші для параболічних систем з оператором Бесселя присвячено багато праць. Вперше означення B-параболічної системи рівнянь, яке узагальнює поняття параболічності за Петровським на випадок систем рівнянь з частинними похідними, які за однією з просторових змінних містять оператор Бесселя, ввели М.І. Матійчук та В.В. Крехівський в 1968 році в праці [5]. У праці [6] М.І. Матійчука дається більш загальне означення $\overrightarrow{2B}$-параболічних систем з оператором Бесселя, які містять клас $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем, введених С.Д. Ейдельманом [7]. У цій праці, а також у [8] для B-параболічних та $\overrightarrow{2B}$-параболічних систем рівнянь будується теорія класичних розв'язків задачі Коші: дається аналітичний опис матриці Гріна систем з коефіцієнтами, залежними лише від t, та систем з параметром, досліджуються властивості інтегралів, які містять матрицю Гріна, та інших спеціальних інтегралів типу потенціала. Ці властивості становлять основу для знаходження розв'язку задачі Коші з мінімальними умовами на гладкість коефіцієнтів за просторовими змінними. Задача Коші для таких систем за допомогою методу потенціалу зводиться до неквазірегулярного інтегрального рівняння Вольтерра-Фредгольма і з формули розв'язку задачі виділяється ядро оберненого оператора – фундаментальна матриця розв'язку задачі Коші, яка має конструкцію параметрикса Е. Леві. Розв'язок задачі Коші дається при цьому у вигляді інтеграла Стільтьєса з мірою Бореля у класі функцій максимального експоненційного зростання.

Для вивчення властивостей модуля неперервності старших похідних фундаментальної матриці розв'язків (ФМР) М.І. Матійчук у [9] використовує метод Е. Хопфа [10], на основі якого введенням великого параметра будуються ФМР B-параболічних систем вищого порядку за t та систем з багатовимірним оператором Бесселя, а також систем з неперервними за Діні коефіцієнтами за просторовими змінними, правою частиною і початковою функцією [11]. Крім того, в [11] теореми про розв'язність задачі Коші та існування ФМР поширюються на $\overrightarrow{2B}$-параболічні системи.

Розв'язність задачі Коші для однорідних B-параболічних систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами у певному класі початкових функцій з просторів типу W встановлена В.В. Крехівським [12]; при цьому розв'язок трактується як регулярна узагальнена функція, визначена на просторі основних функцій типу W, введеному в [13]. Знайдено обмеження на рід B-параболічної системи, при виконанні яких розв'язок є звичайною функцією.

С.Д. Івасишеним та В.П. Лавренчуком [14] знайдено зображення класичних розв'язків рівномірно B-параболічних систем у вигляді інтегралів Пуассона функцій або узагальнених борельових мір зі спеціальних просторів (які збігаються з множинами початкових значень цих розв'язків) у припущенні, що коефіцієнти a_{kj}, $|k|+2j \leq 2b$, неперервні по t на $(0, T]$ при кожному $x \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, неперервність a_{kj}, $|k| + 2j = 2b$, рівномірна по $x \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, всі коефіцієнти обмежені в $\Omega_+ = (0, T] \times \mathbb{R}_+^{n+1}$ і задовольняють умову Гельдера по $x \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ рівномірно відносно $t \in [0, T]$.

У працях [15–17] вивчалися якісні властивості розв'язків B-параболічних систем (знайдені внутрішні оцінки розв'язків у гельдерових нормах, доведені класичні теореми Ліувілля). Побудовані та досліджені властивості ФРЗК для B-параболічних рівнянь довільного порядку зі степеневими особливостями у коефіцієнтах при молодших похідних.

У випадку обмежених початкових функцій А.Б. Муравником у працях [18, 19] вивчалося питання поточкової стабілізації розв'язку задачі Коші (тобто існування у розв'язку $u(t, x)$ скінченної границі при $t \to +\infty$ та фіксованому x) для модельного B-параболічного рівняння. Умова поточкової стабілізації у даному випадку подається в термінах кульового граничного середнього від початкової функції.

Праці [20, 21] присвячені слабкій стабілізації розв'язку задачі Коші для сингулярного $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами. Для початкової узагальненої функції вводиться поняття узагальненого граничного середнього по тілах, поверхнями яких є поверхні, залежні від параметра t, котрі в певному розумінні при $t \to +\infty$ збігаються до поверхонь рівня фундаментального розв'язку задачі Коші. Якщо узагальнене граничне середнє по таких тілах узагальненої початкової функції f дорівнює нулеві, то розв'язок задачі Коші з початковою функцією f стабілізується до нуля в просторах типу S' (простори типу S введені І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим в [22]).

Праця [23] А.А. Куликова присвячена дослідженню існування фундаментального розв'язку диференціального оператора $P\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_{n-1}}, B_{x_n}\Big)$, де P – поліном від n змінних зі сталими коефіцієнтами, B_{x_n} – оператор Бесселя, який діє за змінною x_n. Основним методом дослідження в [23] є метод перетворення Фур'є-Бесселя, яке визначається на просторі основних функцій $\mathcal{D}_+$ (просторі всіх фінітних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^n$ функцій, парних за змінною x_n). Існування фундаментального розв'язку оператора P в [23] доводиться за допомогою спеціальної конструкції, запропонованої Л. Хермандером в [24]. При цьому розглядаються різні випадки щодо характеристик полінома P, в кожному з яких одержується формула для перетворення Фур'є-Бесселя фундаментального розв'язку.

При дослідженні задачі Коші для B-параболічних рівнянь важливу роль відіграє метод інтегрального перетворення Бесселя. Властивості такого перетворення у просторі $S(\mathbb{R}^n_+)$ – просторі Л. Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ функцій, парних за змінною x_n, вивчені Я.І. Житомирським у праці [25]. Вказаний метод істотно використовувався в [25] при дослідженні задачі Коші для лінійних рівнянь вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(B_\nu)u, \tag{1.1}$$

де B_ν – оператор Бесселя, $\nu > -1/2$, $P(B_\nu)$ – поліном від оператора B_ν (в [25] досліджувалися також системи вигляду (1.1) та більш загальні системи вигляду $\dfrac{\partial u}{\partial t} = P(B_1, \ldots, B_n)u$, де B_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, – оператор Бесселя, який діє по змінній x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$). В [25] детально вивчаються також властивості перетворення Бесселя у просторі $S'(\mathbb{R}_+)$, елементами якого є лінійні неперервні функціонали на $S(\mathbb{R}_+)$. Ці властивості дозволяють встановити існування розв'язку задачі Коші для (1.1) у класі початкових функцій u_0, які задовольняють умову: $|u_0(x)| \leq c(1 + x^2)^k$, $k \in \mathbb{N}$, $c > 0$, $x \in \mathbb{R}$; при цьому розв'язок трактується як регулярна узагальнена функція з простору $S'(\mathbb{R}_+)$. Виділяється також клас регулярних систем вигляду (1.1), для яких розв'язок задачі Коші є звичайною функцією (параболічні системи з оператором Бесселя).

B-параболічність рівняння (1.1) забезпечує існування фундаментального розв'язку задачі Коші – функції $G(t, \cdot) = F_B^{-1}[\exp\{tP(-\sigma^2)\}]$, $t > 0$, $\sigma \in (0, \infty)$, де F_B^{-1} – обернене перетворення Бесселя. В працях [26, 27] доведено, що функція G при кожному $t > 0$ є елементом одного із просторів типу S. Функції типу згорток $G(t, \cdot) * f$, де f – узагальнена функція з простору типу S', є нескінченно диференційовними по x при кожному $t > 0$, задовольняють (1.1) у звичайному розумінні, але граничне значення згортки $G(t, \cdot) * f$ при $t \to +0$ існує вже в просторі узагальнених функцій типу S'. Отже, відповідні простори типу S' збігаються з множинами початкових значень розв'язків рівняння (1.1), при яких розв'язки є нескінченно диференційовними за x функціями. Це дозволяє ставити задачу Коші для (1.1) у просторі початкових даних типу S', розуміючи при цьому під розв'язком такої задачі функцію $u(t,x)$, яка задовольняє (1.1) у звичайному розумінні, а початкову умову $u|_{t=0} = f$ (f – узагальнена функція з простору типу S') в тому сенсі, що $u(t,\cdot) \to f$ при $t \to +0$ у відповідному просторі типу S'. У вказаних працях встановлюється коректна розв'язність задачі Коші для рівнянь та систем рівнянь вигляду (1.1) в просторах початкових даних типу S', вивчається властивість локалізації розв'язку задачі Коші.

Аналогічні результати отримані в [28] для B-параболічних рівнянь (та систем рівнянь) зі змінними коефіцієнтами та початковими умовами з просторів узагальнених функцій типу S' у припущенні, що коефіцієнти рівняння є нескінченно диференційовними по x і обмеженими разом з усіма своїми похідними функціями.

В.В. Городецьким та О.В. Мартинюк у працях [29–32] встановлена коректна розв'язність задачі Коші для еволюційних рівнянь з оператором Бесселя вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k B_\nu^k u, \quad c_k = \text{const}, k \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.2}$$

з початковими функціями, які є аналітичними функціоналами з просторів типу $(\overset{\circ}{W})'$ (простори типу $\overset{\circ}{W}$ складаються з парних функцій просторів типу W). Знайдено необхідні й достатні умови, за яких оператор $\varphi(B_\nu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k B_\nu^k$, що діє в просторах типу $\overset{\circ}{W}$, є неперервним, досліджені властивості згорток, згортувачів та мультиплікаторів у відповідних просторах. У праці [33] розглядаються рівняння (1.2) з коефіцієнтами, залежними вже від часу, неперервно диференційовними на відрізку $[0,T]$. Встановлено коректну розв'язність задачі Коші для такого рівняння в просторах узагальнених функцій типу $(\overset{\circ}{C})'$; при цьому, попередньо досліджена топологічна структура просторів типу $\overset{\circ}{C}$, які є узагальненнями просторів типу $\overset{\circ}{W}$; вивчені властивості основних операцій у таких просторах, перетворення Бесселя основних і узагальнених функцій. Розв'язність задачі Коші для еволюційних рівнянь вигляду (1.2) з коефіцієнтами $c_k = c_k(t, x)$ встановлена в [34] у класі обмежених, неперервних, парних на $\mathbb{R}$ функцій; при цьому знайдено інтегральне зображення розв'язку.

У працях [35, 36] знайдені в явному вигляді фундаментальні розв'язки задачі Коші та доведені теореми про розв'язність у спеціальних вагових L_p-просторах задачі Коші для одного класу параболічних рівнянь з оператором Бесселя та зі зростаючими за просторовими змінними при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами.

Крайові задачі для сингулярних параболічних рівнянь та систем рівнянь досліджувалися М.І. Матійчуком, В.В. Крехівським, І.А. Кіпріяновим, В.В. Катраховим, В.М. Ляпіним, В.П. Лавренчуком та ін. Цьому присвячені, зокрема, праці [37–48]. У працях [37–46] побудована теорія параболічних сингулярних крайових задач у нормованих просторах, розв'язана загальна B-параболічна задача з ваговими крайовими умовами, знайдені обмеження на коефіцієнти рівнянь і межу області, при яких у розв'язків зберігаються основні властивості, характерні для розв'язків задач з гладкими даними.

Задачі Діріхле, Неймана та більш загальна задача – задача з косою похідною для B-параболічного рівняння другого порядку досліджувалися в [37]. Тут, за допомогою методу Хопфа, з використанням функції Гріна однорідної задачі із "замороженими" коефіцієнтами доводиться коректність задачі Діріхле за однієї умови Діні на модулі неперервності коефіцієнтів. Знайдено інтегральне зображення розв'язку задачі Неймана (задачі з косою похідною), описано властивості функції Гріна однорідної задачі Діріхле. У праці [38] будується функція Гріна і досліджується розв'язок загальної неоднорідної параболічної задачі з оператором Бесселя в просторах Діні у випадку граничних операторів рівних порядків. Загальні мішані неоднорідні задачі для B-параболічних систем за допомогою спеціальних потенціалів та операторів дробового інтегрування й диференціювання, які діють у просторах Діні, досліджені в [39]. У праці [40], яка є продовженням [39], основні припущення щодо гладкості накладаються на межу циліндричної області та коефіцієнти граничних операторів різних порядків.

У праці [41] розв'язана загальна крайова параболічна задача з нульовими крайовими умовами при наявності виродження у коефіцієнтів системи та граничних операторів на межі циліндричної області. Загальна параболічна крайова задача з ваговими функціями в крайових умовах у циліндричній області, в якій оператор Бесселя у рівнянні і крайових умовах діє за тією ж змінною, що й граничні оператори з ваговими функціями, досліджена М.І. Матійчуком у праці [42].

Крайові задачі для сингулярних параболічних систем рівнянь у класах Гельдера та спеціальних вагових L_p-просторах вивчалися в [43]. У просторах Соболєва мішані задачі для параболічних систем з оператором Бесселя (із залежними та незалежними від часової змінної коефіцієнтами) досліджував В.В. Крехівський [44, 45]. Ним встановлені апріорні оцінки розв'язків, доведена однозначна розв'язність мішаних задач у просторах Соболєва з вагою. У праці [46] та монографії [47] у просторах Гельдера встановлюється локальна розв'язність крайової задачі для нелінійної параболічної системи з оператором Бесселя. Глобальну розв'язність задачі Діріхле для квазілінійного B-параболічного рівняння другого порядку доведено в [48].

1.2. Задача Коші для абстрактних диференціально-операторних рівнянь

Задача Коші для абстрактних диференціально-операторних рівнянь вивчалася багатьма математиками, зокрема, М.Л. Горбачуком, В.І. Горбачук, П.Й. Дудніковим, О.І. Кашпіровським, А.В. Князюком, М.І. Півтораком, І.П. Фішманом та ін. [49–67]. Особлива увага при цьому приділялася питанням зображення розв'язків таких рівнянь та дослідженню їх граничних значень у різних функціональних просторах. Огляд цих праць наведено в монографії [51] та праці [64]. Тут коротко охарактеризуємо основні результати зазначених досліджень, які стосуються абстрактних диференціально-операторних рівнянь першого порядку вигляду

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in (0, +\infty), \tag{1.3}$$

де A – генератор сильно неперервної при $t > 0$ півгрупи e^{-tA} обмежених лінійних операторів у банаховому просторі X. Сильним розв'язком такого рівняння на $(0, +\infty)$ називається функція $u(t)$: $(0, +\infty) \to \mathcal{D}(A)$, яка сильно неперервно диференційовна й задовольняє рівняння (1.3) (тут $\mathcal{D}(A)$ – область визначення оператора A). З цього означення випливає, що при кожному $f \in \mathcal{D}(A)$ функція $e^{-tA}f$ – розв'язок рівняння (1.3). Якщо A – обмежений оператор, то формула $u(t) = e^{-tA}f$, $f \in X$, описує всі сильні розв'язки рівняння (1.3) [49]. У випадку необмеженого оператора A це не завжди так.

У працях [50, 51] встановлено, що коли A – невід'ємний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі H, то загальний розв'язок рівняння (1.3) зображається у вигляді $u(t) = e^{-t\hat{A}}f$, $f \in H_-$, де H_- – сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів на просторі аналітичних векторів оператора A (зі слабкою збіжністю), $\hat{A}$ – невід'ємний самоспряжений оператор, який є розширенням оператора A у просторі $H_- \supset H$. Функція $e^{-t\hat{A}}f$ є нескінченно диференційовною на $(0, +\infty)$, причому у неї існує граничне значення при $t \to +0$ у просторі H_-, яке збігається з елементом f. Звідси випливає, що задача Коші для рівняння (1.3) коректно розв'язна в просторі H_-, тобто для довільного $f \in H_-$ існує єдиний розв'язок рівняння (1.3) такий, що $u(t) \to f$ при $t \to +0$ в H_-, який неперервно залежить від початкових даних.

Зазначені результати А.В. Князюком [53,54] перенесені на більш широкий клас операторів A у банаховому просторі X: A – генератор сильно неперервно диференційовної при $t > 0$ півгрупи e^{-tA} в X, для якої $\mathrm{Ker} e^{-t_0 A} = \{0\}$ при деякому $t_0 > 0$.

З огляду на структуру загального розв'язку рівняння (1.3) виникає запитання: які властивості повинен мати розв'язок рівняння (1.3), щоб його граничне значення в нулі належало до певного підпростору простору X_- (який є аналогом простору H_-), зокрема, до простору X, оскільки $X \subset X_-$. У випадку невід'ємного самоспряженого оператора A в просторі $X \equiv H$ це питання вивчено в [50]. Зокрема, встановлено, що необхідною й достатньою умовою належності f до H є умова $\sup\limits_{0<t\leq 1} \|u(t)\|_H \leq c < \infty$. У праці [54] ці результати узагальнюються на випадок, коли A – генератор аналітичної обмеженої півгрупи e^{-tA} в банаховому просторі X.

Слабким розв'язком рівняння (1.3) на $(0, +\infty)$ називається сильно неперервна на $(0, +\infty)$ функція $u(t)$ зі значеннями в X така, що для кожного $g \in \mathcal{D}(A^*)$ скалярна функція $\langle u(t), g\rangle$ є диференційовною на $(0, +\infty)$ і задовольняє рівняння

$$(\langle u(t), g\rangle)'_t + \langle u(t), A^* g\rangle = 0, \quad t \in (0, +\infty).$$

Якщо оператор A генерує півгрупу e^{-tA}, $t > 0$, обмежених лінійних операторів в X, то функція $e^{-tA} f$, $f \in X$, є слабким розв'язком рівняння (1.3), неперервним у точці 0. Як показано в [55], формулою $u(t) = e^{-tA}f$, $f \in X$, описуються всі такі розв'язки рівняння (1.3).

Випадок, коли A – генератор півгрупи стиску e^{-tA}, $t > 0$, такої, що $\mathrm{Ker}\, e^{-tA} = \{0\}$ при $t > 0$, розглядався в [56]. Авторами одержано ряд важливих результатів, зокрема, встановлено, що кожний слабкий розв'язок рівняння (1.3) на $(0, +\infty)$ має граничне значення при $t \to +0$ у просторі X_- і зображається формулою $u(t) = e^{-t\hat{A}}f$, $f \in X_-$, $u(0) = f$. Навпаки, для кожного $f \in X_-$ функція $e^{-t\hat{A}}f$ є слабким розв'язком рівняння (1.3) на $(0, +\infty)$. Якщо A – генератор аналітичної півгрупи e^{-tA}, $t > 0$, лінійних обмежених операторів в X, то кожний слабкий розв'язок рівняння (1.3) є нескінченно диференційовним (аналітичним) на $(0, +\infty)$. В [56] з'ясовано також, що умова $\sup\limits_{0<t\leq 1} \|u(t)\|_X \leq c < \infty$ є необхідною й достатньою умовою, за якої граничне значення в нулі слабкого розв'язку є елементом простору X у випадку, коли A – генератор півгрупи класу C_0. Таким чином, обмеженість слабкого розв'язку рівняння (1.3) в околі нуля еквівалентна його неперервності в точці 0 у сенсі топології простору X.

Рівняння загальнішого вигляду

$$\alpha(t)u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in (0, T], T < \infty, \tag{1.4}$$

де $\alpha(t) > 0$, $t \in (0, T]$, – скалярна неперервна на $(0, T]$ функція, A – замкнений оператор у банаховому просторі з щільною областю визначення, детально вивчено в [57] В.П. Глушком і С.Г. Крейном для обмеженого оператора A; П.Е. Соболевським у [58] для необмеженого A при певних додаткових обмеженнях на розв'язок. Питання про зображення загального розв'язку та його поведінку при наближенні t до нуля для $A = A^*$ в гільбертовому просторі досліджувалося М.Л. Горбачуком і М.І. Півтораком в [59], а для генератора аналітичної півгрупи в банаховому просторі – В.М. Горбачуком, І.Т. Мацишиним в [60].

Рівняння (1.4) з оператором $A = A^* \geq 0$ з суто дискретним спектром у сепарабельному гільбертовому просторі H розглянуто В.В. Городецьким [65] у припущенні, що $\int\limits_0^T \alpha(\tau)d\tau < +\infty$ (випадок "слабкого виродження"). Оператор A будується за ортонормованим базисом $\{e_k, k \geq 1\}$ простору H так, що елементи e_k, $k \in \mathbb{N}$, є його власними векторами, а власні числа λ_k, $k \in \mathbb{N}$, мають наперед задані властивості. При цьому відповідні негативний H_- та позитивний H_+ простори, а також H, вкладаються в простір Φ' формальних рядів Фур'є вигляду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, які ототожнюються з лінійними неперервними функціоналами на просторі $\Phi = \lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{ind} \Phi_m$, де $\Phi_m = \Big\{\varphi \in H \Big| \varphi = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k e_k, b_k \in \mathbb{C}\Big\}$, $m \in \mathbb{N}$ [66]. Знайдено зображення загального розв'язку рівняння (1.4) у вигляді перетворення типу Гаусса-Вейєрштрасса формальних рядів Фур'є, описано максимальні класи початкових даних, з якими коректно розв'язна задача Коші для рівняння (1.4).

Зазначені результати перенесено в [65] на випадок скалярного рівняння загальнішого вигляду $\alpha(t)u'(t) = P(t,A)u(t)$, $t \in (0,T]$, де $P(t,A) = \sum\limits_{k=1}^{2b} a_k(t)A^k$, $a_k \in C[0,T]$, $k \in \{1,\dots,2b\}$, $\alpha(t)$ – неперервна додатна на $(0,T]$ функція така, що $\int\limits_0^T \dfrac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty$, а оператор $P(t,A)$ задовольняє спеціальну умову рівномірної параболічності. У праці [67] досліджена задача Коші для рівняння $u'(t) + \varphi(A)u = 0$, $t \in (0,T]$, де $\varphi(A)$ – ціла функція оператора $A = A^* \geq 0$ в сепарабельному гільбертовому просторі.

Для замкненого оператора в банаховому просторі М.Л. Горбачуком та В.І. Горбачук у працях [68–70] вказано спосіб побудови локально опуклих просторів гладких і узагальнених функцій та встановлено коректну розв'язність різних крайових задач для диференціально-операторного рівняння $\partial u/\partial t = Bu$. Зображення розв'язку при цьому дається через степеневий ряд від експоненти оператора B.

1.3. Задача Коші для псевдодиференціальних рівнянь і систем

Впродовж останніх кількох десятиліть інтенсивно розвивається теорія ПДО та рівнянь з такими операторами. Причиною такого розвитку є насамперед факт тісного зв'язку ПДО з важливими задачами аналізу й сучасної математичної фізики. З'ясувалося, що ПДО відіграють важливу роль у теорії аналітичних крайових задач, в мікролокальному аналізі тощо. Основні результати, одержані в теорії ПДО і ПДР, викладені в ряді всесвітньо відомих монографій [71–78].

Насамперед наведемо тут короткий огляд праць, присвячених задачі Коші для рівнянь із ПДО з аналітичними символами. У праці [13] досліджуються питання, пов'язані з описом класів єдиності задачі Коші для систем рівнянь у згортках вигляду

$$\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} (f_{jk} * u)(t,x), j \in \{1,\dots,m\}, (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Вважається, що компоненти u_j розв'язку u при кожному фіксованому $t \in [0,T]$ є елементами певного основного простору Φ, а f_{jk} – відомі функціонали-згортувачі в Φ такі, що їх перетворення Фур'є $F[f_{jk}]$ – функціонали типу цілих аналітичних функцій на просторі $F[\Phi]$ (тобто $f_{jk}*$ – ПДО з цілими аналітичними символами $F[f_{jk}]$).

Частковим випадком системи (1.5) є диференціальні системи (коли f_{jk} – похідні від δ-функції Дірака), різницеві системи ($f_{jk} = \delta(\cdot - h_{jk})$), системи інтегральних рівнянь, ядра яких залежать від різниці аргументів (тут f_{jk} – регулярні функціонали з компактним носієм).

Встановлено, що у випадку, коли f_{jk} – функціонали з компактним носієм, класом єдиності задачі Коші для системи (1.5) є сукупність функцій φ, які задовольняють нерівність $|\varphi(x)| \leq c \exp\Big(\Big(\dfrac{1}{b_0} - \varepsilon\Big)|x| \ln |x|\Big)$, $x \neq 0$, для довільно фіксованого $0 < \varepsilon < 1/b_0$ (тут b_0 – мінімальний з діаметрів множин, кожна з яких охоплює всі носії f_{jk}). Якщо ж f_{jk} – функціонали типу цілої аналітичної функції з простору S_α^β, $\alpha + \beta = 1$, то класом єдиності розв'язку відповідної задачі Коші є клас функцій φ таких, що $|\varphi(x)| \leq c \exp(|x|(\ln |x|)^{1-\alpha})$, $x \neq 0$.

У працях [79–83] розвивається теорія задачі Коші для параболічних ПДР із гладкими символами в класах

$$S^m_{\lambda,\rho,\delta} := \{p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \,\Big|\, \forall\{\alpha,\beta\} \subset \mathbb{Z}^n_+ \,\exists c > 0 \forall\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n :$$

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x p(x,\xi)| \leq c\lambda(x,\xi)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\}, m \in \mathbb{R}, \rho \in [0,1], \delta < \rho,$$

де λ – деяка вагова функція з простору $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Досліджується задача Коші вигляду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + p(t,x,D_x)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^n, \quad (1.6)$$

$$u|_{t=0} = u_0,$$

де $p(t,x,D_x)$ – ПДО, дія якого на елементах з простору S задається в класичній формі дробового диференціювання з символом $p(t,x,\xi)$, який при кожному фіксованому $t \in [0,T]$ належить до класу $S^m_{\lambda,\rho,\delta}$. За таких умов в [79–82] побудовано фундаментальний розв'язок задачі (1.6), встановлено розв'язність цієї задачі у просторах $L_p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$.

K. Shinkai в [83] поширює схему побудови фундаментального розв'язку задачі Коші (1.6) на випадок псевдодиференціальних систем.

В.В. Городецьким в [65] визначається аналог операції дробового диференціювання Вейля у просторах узагальнених періодичних функцій, яка трактується як ПДО, що відображає періодичні функції у періодичні з тим же періодом функції. Встановлено коректну розв'язність задачі Коші для еволюційних рівнянь з вказаними ПДО у просторах періодичних узагальнених функцій типу ультрарозподілів.

Задача Коші для ПДР з оператором Бесселя дробового диференціювання $(E - D_x^2)^{\gamma/2}$, $\gamma > 0$, вивчалася В.В. Городецьким та О.М. Ленюком [84] у просторах $(S_\alpha^\beta)'$ початкових даних. Досліджені властивості фундаментального розв'язку – функції $G(t, \cdot) = F^{-1}[\exp(-t(1+\xi^2)^{\gamma/2})]$, $t > 0$. З'ясовано, що $G(t, \cdot) \in S^{1/\gamma}_{([\gamma]+1)/\gamma}$ (тут $[\cdot]$ – ціла частина числа), а задача Коші завжди коректно розв'язна у випадку, коли початкова функція $f \in (S^{1/\gamma}_{([\gamma]+1)/\gamma})'$ є згортувачем у просторі $S^{1/\gamma}_{([\gamma]+1)/\gamma}$; її розв'язок $u(t, \cdot) = G(t, \cdot) * f$ – елемент простору $S^{1/\gamma}_{([\gamma]+1)/\gamma}$ при кожному фіксованому $t > 0$. Зазначимо, що оператор Бесселя дробового диференціювання визначається як обернений оператор до дробового степеня $(E - D_x^2)^{-\gamma/2}$ Бесселевого потенціала. Побудовою у різних просторах і визначенням властивостей таких операторів займалися N. Aronszajn, K.R. Smith, A.P. Calderon, R. Adams, В.О. Ногін, Б.С. Рубін та ін. (див. [85]).

Зупинимося тут також на працях [86–88], в яких досліджена задача Коші для рівнянь типу фрактальної дифузії, які містять регуляризовану дробову похідну за часовою змінною. В [86] доведена теорема існування та єдиності розв'язку абстрактної задачі Коші для рівняння $D_t^\alpha u(t) = Au(t)$, де A – замкнений лінійний оператор у банаховому просторі, D_t^α – регуляризована дробова похідна Рімана-Ліувілля порядку $\alpha \in (0,1)$. На підставі цього в [87] доведено єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння $D_t^\alpha u(t,x) = Lu(t,x)$ у класі обмежених та експоненційно зростаючих з порядком зростання $2/(2-\alpha)$ функцій (L – еліптичний диференціальний оператор другого порядку з неперервними та обмеженими дійсними коефіцієнтами). У праці [88] за допомогою методу параметрикса встановлено розв'язність задачі Коші для рівняння $D_t^\alpha u(t,x) = Lu(t,x)$ у класі функцій, що зростають як $\exp(c|x|^{2/(2-\alpha)})$. Рядом авторів досліджувалася також задача типу задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь з дробовими похідними Рімана-Ліувілля (див. [85]).

На сьогодні особливої уваги заслуговує теорія ПДР з негладкими символами, зародження якої пов'язують з дослідженням рівнянь, що містять дробовий степінь $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа (див. [85]). Ідея реалізації такого степеня на функціях f з S особливо прозора в образах Фур'є: $(-\Delta)^{\alpha/2} f = F^{-1}[|\xi|^\alpha F[f]]$. Проте ця формула є мало придатною для поширення зазначеної операції на функції з простору $L_1(\mathbb{R}^n)$. Однак, з огляду на добре відому формулу дії перетворення Фур'є на згортку $F[f * \varphi] = F[f] \cdot F[\varphi]$, її можна формалізувати до більш зручної форми

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f = F^{-1}[|\xi|^\alpha] * f. \qquad (1.7)$$

Реалізація цієї схеми стала можливою завдяки появі теорії розподілів Шварца [89]. При $\mathrm{Re}\alpha > 0$ функція $F^{-1}[|\xi|^\alpha]$ є локально інтегровною; згортку з цією функцією називають потенціалом Рісса

$$D^\gamma f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F^{-1}[|x-y|^\gamma] f(y) dy, \quad \gamma = -\alpha, \qquad (1.8)$$

а саму функцію $F^{-1}[|\xi|^\alpha]$ – ріссовим ядром. Вперше потенціал з ядром $|\xi|^{-\alpha-n}$, $\mathrm{Re}\alpha < 0$, з'явився в дисертаційній роботі О. Фростмана [90], виконаній під керівництвом Ф. Рісса. Дослідженням потенціалів Рісса в просторах інтегровних функцій займалися G.H. Hardy, J.E. Littlewood [91], О.Л. Соболєв [92], G.O. Thorin [93] та інші.

Зазначимо, що у випадку $\mathrm{Re}\alpha > 0$ інтеграл (1.8) має порядок особливості, більший ніж розмірність простору $\mathbb{R}^n$, саме тому його називають гіперсингулярним інтегралом. Такий інтеграл завжди розбігається, тому реалізація згортки (1.7) у вигляді (1.8) потребує коректного означення. Зміст інтегралу (1.8) можна надати шляхом його регуляризації завдяки відніманню відрізка ряду Тейлора функції f, або взяття її скінченної різниці:

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy, \quad l > \alpha, \tag{1.9}$$

де $(\Delta_y^l f)(x)$ – скінченна різниця функції f порядку l з кроком y в точці x, а $d_{n,l}(\alpha)$ – спеціальний нормуючий множник, який вибирається так, щоб $(-\Delta)^{\alpha/2}$ не залежав від l при $l > \alpha$. Так визначений $(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, називають оператором Рісса дробового диференціювання і позначають символом D^α.

Гіперсингулярний інтеграл (1.9) породжує обернений оператор до потенціалу Рісса $I^\alpha = D^{-\alpha}$. Реалізація дробового диференціювання Рісса $(-\Delta)^{\alpha/2}$ у вигляді гіперсингулярного інтеграла на випадок $0 < \alpha < 2$, вперше з'явилася в праці І. Стейна [94]. Загальний випадок $\alpha > 0$ розглядався П.І. Лізоркіним [95] та С.Г. Самком [96]. Дослідження нормуючих констант $d_{n,l}(\alpha)$, як функцій параметра α, здійснив С.Г. Самко [96, 97]. Збіжність гіперсингулярних інтегралів на диференційовних функціях, а також можливість пониження порядку l скінчених різниць розглядалися в [96].

Узагальненням гіперсингулярного інтеграла (1.9) є конструкція вигляду

$$(D^{\alpha}_{\Omega} f)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(\Delta^l_y f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} \Omega(x,y) dy, \quad l > \alpha, \quad (1.10)$$

де $\Omega(\cdot,\cdot)$ – деяка функція, незалежна від f (так звана характеристика). Зазначимо, що клас гіперсингулярних інтегралів (1.10), навіть лише при $\Omega(x,y) \equiv \Omega(y)$, де $\Omega(\cdot)$ – однорідна функція, є досить багатим. Він, зокрема, містить оператори вигляду $F^{-1}[a_\alpha(\xi)F]$, де a_α – однорідна функція порядку α певної гладкості. У випадку цілих α до цього класу належать усі однорідні диференціальні оператори частинних похідних порядку α.

Вперше гіперсингулярні інтеграли з однорідною характеристикою з'явилися в працях Р. Відена [98, 99]; згодом, з характеристикою $\Omega(x,y)$ – у М. Фішера [100]. У формі (1.10) гіперсингулярні інтеграли розглядалися С.Г. Самком [96, 101, 102].

Випадок однорідних символів має важливі застосування в теорії випадкових процесів. Наприклад, ПДО Рісса з символом $|\xi|^\gamma$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $0 < \gamma < 1$, є твірним оператором симетричного стійкого процесу [103]. Фундаментальні розв'язки задачі Коші для параболічних ПДР, які містять ПДО, побудовані за символом $|\xi|^\gamma$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $0 < \gamma \leq 2$, можна трактувати як густини розподілів ймовірностей деяких випадкових величин. Як зазначено в [104], при $0 < \gamma < 1$ такі розподіли досліджувалися Д. Пойа, при $\gamma = 1$ – О. Коші, при $\gamma = 3/2$ – Ж. Хольцмарком, а при $\gamma = 2$ – К. Гауссом.

Теорія ПДО з негладкими символами має своє застосування і в сучасній теорії фракталів. У [86] та цитованих там працях Р.Р. Нігматуліна, М.М. Джрбашяна й А.Б. Нерсесяна йдеться про дослідження дифузійних процесів у фрактальних середовищах завдяки еволюційним рівнянням дробового порядку з негладкими символами.

Дослідження модельних лінійних параболічних ПДР зі сталими однорідними негладкими в точці 0 символами було розпочате С.Д. Ейдельманом та Я.М. Дрінем в [105]. Згодом вони розглядали рівняння більш загального вигляду й одержали ряд важливих результатів, пов'язаних з розв'язністю задачі Коші в класах гельдерових функцій, з інтегральним зображенням розв'язку, шаудерівськими оцінками та властивістю стабілізації розв'язку [106–108]. Точну асимптотичну поведінку фундаментального розв'язку при $|x| \to \infty$ було встановлено М.В. Федорюком [109]. З'ясовано, що вона не є експоненційною, як у випадку параболічних диференціальних рівнянь з частинними похідними, а степеневою. Згодом W.R. Schneider [110] (див. також [111]), використовуючи перетворення Мелліна, встановлює зображення густин "стійких розподілів" у вигляді спеціальної H-функції Фокса і, як наслідок, одержує зазначену асимптотичну поведінку цих густин. Методика дослідження властивостей фундаментального розв'язку, яка використовувалася в зазначених працях (крім [110]), своєю специфікою накладає обмеження на порядок однорідності γ головного символу рівняння: $\gamma > 1$.

А.Н. Кочубей в [103] вперше одержав точні оцінки параметрикса задачі Коші для лінійного ППДР з символами певної гладкості поза початком координат, залежними від часу та просторової змінної у випадку, коли розмірність простору більша за одиницю та $\gamma \geq 1$. Новий підхід до дослідження параметрикса, запропонований в [103], базується на використанні елементів теорії узагальнених функцій, гармонійного аналізу і гіперсингулярних інтегралів. В [103] доведено також теорему про розв'язність задачі Коші в класах функцій з певним степеневим зростанням при $|x| \to \infty$. В [103, 111] встановлено аналог принципу максимуму, завдяки якому доведено теорему про єдиність розв'язку задачі Коші в класах невід'ємних спадних функцій.

В.В. Городецьким в [27] досліджена задача Коші для еволюційного рівняння з ПДО, символом якого є нескінченно диференційовна поза початком координат однорідна функція з показником однорідності $\gamma > 1$. Будується спеціальний простір Φ основних функцій, що породжується властивостями фундаментального розв'язку $G(t, x)$, при цьому $G(t, \cdot) \in \Phi$ при кожному $t > 0$. Розв'язок задачі Коші дається у вигляді згортки $G(t, x) * f$, де f – узагальнена функція з простору Φ'. З'ясовано, що якщо f – фінітна узагальнена функція, то $u(t, x) = G(t, x) * f$ – звичайний (класичний) розв'язок рівняння, нескінченно диференційовний по x, $u(t, \cdot) \in \Phi$ при кожному $t > 0$, але $u(t, \cdot) \to f$ при $t \to +0$ у просторі Φ', тобто f – граничне значення $u(t, \cdot)$ при $t \to +0$ у просторі Φ'. Отже, для зазначеного еволюційного рівняння можна розглядати задачу Коші з початковими даними – узагальненими функціями з простору Φ'. Для цієї задачі в [27] встановлюється її коректна розв'язність у просторі Φ', доводиться принцип локалізації та властивість слабкої стабілізації розв'язку задачі Коші. Зазначена схема дослідження задачі Коші та одержані результати поширюються в [112] на випадок рівняння поліноміального вигляду.

У [113] визначено новий клас вироджених параболічних рівнянь, які можуть містити ПДО з негладкими символами. Він природно узагальнює класичне рівняння дифузії з інерцією Колмогорова. Для модельних рівнянь з цього класу будуються й досліджуються фундаментальні розв'язки; наводяться приклади.

Дисертаційна робота Р.Я. Дріня [114] присвячена дослідженню якісних властивостей розв'язків параболічних ПДР з негладкими символами. Одержано асимптотичне зображення фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії з псевдодиференціальним доданком у випадку $n \in \{1, 3\}$, доведено єдиність невід'ємних слабких розв'язків задачі Коші для зазначеного рівняння дифузії, ряд теорем про стабілізацію розв'язків задачі Коші, а також теорему про стійкість тривіального розв'язку та теорему типу Ліувілля. Дослідженню якісних властивостей розв'язків ППДР та систем присвячені також праці [115–118].

У працях [119, 120] встановлено коректну розв'язність задачі Коші для ППДР, що є поліномами певних ПДО, з початковими даними з просторів узагальнених функцій скінченного або нескінченного порядків типу розподілів та ультрарозподілів, досліджено властивості локалізації та слабкої стабілізації розв'язків задачі Коші для вказаних рівнянь.

В.А. Літовченком в [121–123] побудовано нові класи параболічних ПДР і систем з опуклими символами псевдодиференціювання різного ступеня гладкості, залежними лише від параметра t, класи параболічних періодичних ПДО, параболічних ПДР і систем з точково-негладкими символами псевдодиференціювання, які не залежать від просторового параметра і мають за просторовою змінною характерні для степеневих функцій властивості. Встановлено коректну розв'язність задачі Коші для означених ППДР і систем у випадку, коли початкові дані можуть бути узагальненими функціями типу розподілів або ультрарозподілів, досліджені властивості локалізації та стабілізації розв'язків.

Задача Коші для еволюційних рівнянь з псевдобесселевими операторами (побудованими за "сталими" символами) у певному просторі $(\mathring{\Phi})'$ узагальнених функцій типу розподілів досліджена В.В. Городецьким та О.М. Ленюком у працях [124,125]. Встановлено коректну розв'язність задачі Коші з початковими даними з простору $(\mathring{\Phi})'$, який співпадає з множиною початкових значень гладких розв'язків таких рівнянь; знайдено зображення розв'язку. Аналогічні результати отримані в [126] для еволюційного рівняння з оператором $\varphi(A)$, де $\varphi(A)$ – ціла функція від псевдобесселевого оператора A.

1.4. Задача Коші для рівнянь з частинними похідними нескінченного порядку

Детальний огляд праць, присвячених задачі Коші для рівнянь із ПДО з аналітичними символами, що утворюють алгебру в різних просторах основних та узагальнених функцій і визначаються як диференціальні оператори нескінченного порядку, проведено в [127]. Особливої уваги заслуговують результати досліджень Ю.А. Дубінського, який розвинув теорію задачі Коші в просторах Соболєва W^∞ нескінченного порядку для ПДР з аналітичними символами, запропонував варіант теорії узагальнених функцій, в рамках якої позитивно вирішується проблема розв'язності задачі Коші для довільного лінійного диференціального рівняння з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

Під просторами Соболєва W^∞ розуміють різні класи нескінченно диференційовних функцій дійсних змінних x_1, $\ldots$, x_n, для яких

$$\rho(u) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \|D^\alpha u\|_{r_\alpha}^{p_\alpha} < +\infty,$$

де $\|D^\alpha u\|_{r_\alpha}$ позначає норму похідної $D^\alpha u$ у просторах Лебега L_{r_α}, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – мультиіндекс з цілими невід'ємними координатами, $r_\alpha \geq 1$, $p_\alpha \geq 1$ – довільні числові послідовності. Визначальною умовою коректності задачі Коші є умова нетривіальності відповідних просторів Соболєва нескінченного порядку. У працях [128–132] знайдено критерії нетривіальності просторів Соболєва W^∞ у випадку евклідового простору $\mathbb{R}^n$, простору майже періодичних та періодичних функцій, обмеженої та конічної областей. У працях [133, 134] досліджені простори Соболєва-Орліча нескінченного порядку функцій, заданих на $\mathbb{R}^n$ або на обмеженій області $G \subset \mathbb{R}^n$. С.Р. Умаровим [135] знайдено необхідні й достатні умови нетривіальності просторів нескінченного порядку, породжених одним або декількома спектральними за Данфордом операторами.

Простори Соболєва нескінченного порядку як границі просторів Соболєва скінченного порядку, властивості сепарабельності, рефлексивності, рівномірної опуклості та вкладення таких просторів досліджували Ю.А. Дубінський [136, 137], Ха Зуй Банг [138] та Г.С. Балашова [139].

У праці [140] позитивно вирішується проблема коректної розв'язності задачі Коші для рівняння

$$\partial_t^m u + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t, D_x)\partial_t^k u = h(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N},$$

у просторах Соболєва нескінченного порядку W_R^∞ та $W_R^{-\infty}$; при цьому W_R^∞ складається з функцій, перетвореннями Фур'є яких є фінітні в кулі S_R функції, $W_R^{-\infty}$ – простір, топологічно спряжений з простором W_R^∞, $A_k(t, D)$ – лінійні диференціальні оператори (взагалі кажучи, нескінченного порядку), символами яких є аналітичні в крузі $|\xi| < R$ функції.

В [141] Ю.А. Дубінським запропоновано метод дослідження деяких класів рівнянь з частинними похідними (зокрема, класичних рівнянь математичної фізики), який використовує алгебру диференціальних операторів нескінченного порядку, що мають сталий аналітичний символ і діють у відповідних просторах Соболєва нескінченного порядку. Це дозволяє шляхом належного введення параметра розв'язувати диференціальне рівняння з частинними похідними як звичайне диференціальне рівняння, приєднавши до нього початкові або крайові умови. Відшукання розв'язку зводиться або до прямого застосування диференціального оператора нескінченного порядку до вихідних даних задачі, або до розв'язання диференціального рівняння нескінченного порядку меншої розмірності.

Алгебра диференціальних операторів нескінченного порядку використовується в [142, 143] також при дослідженні ПДР з комплексним аргументом. Областю визначення ПДО є простір експоненцальних функцій при прямуванні типів цих функцій до певної границі. При цьому алгебра ПДО з аналітичними в області Ω символами ізоморфна простору експоненційних функцій, зростаючих в області аналітичності символа, що дозволяє застосувати метод Хевісайда класичного числення і вивчити ряд задач для диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь з комплексним аргументом.

Ф. Трев у праці [144] довів локальну розв'язність задачі Коші для довільного рівняння з частинними похідними типу Коші-Ковалевської у класах аналітичних функціоналів. При цьому зазначено, що розв'язок може бути зображений за допомогою диференціального оператора нескінченного порядку (гіпердиференціального оператора). Зауважимо також, що Тревом при дослідженні задачі Коші використовувалися простори функцій, перетвореннями Фур'є яких є функції, інтегровні з вагою $\exp(b|\xi|)$, $b > 0$. Ці простори є просторами Соболєва нескінченного порядку, параметри яких залежать від структури конкретного досліджуваного рівняння.

У монографії [145] побудовано аналоги просторів Соболєва нескінченного порядку на торі, даються відповіді на питання про нетривіальність та нескінченновимірність таких просторів. Для рівняння з частинними похідними нескінченного порядку

$$\sum_{|s|=0}^{\infty} a_s \frac{\partial^{|s|} u(x,t)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_m^{s_m}} = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{1.11}$$

в [145] розглядається задача

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\Big|_{t=0} - \mu \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\Big|_{t=T} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, \tag{1.12}$$

де Ω – m-вимірний тор, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $s = (s_0, s_1, \dots, s_m)$, $|s| = s_0 + s_1 + \dots + s_m$; μ, a_s – комплексні числа. Нелокальні умови (1.12) можна вважати умовами, які узагальнюють умови періодичності, тобто задачу (1.11), (1.12) можна розуміти як задачу Коші. Знайдено умови існування та єдиності розв'язку вказаної задачі.

За допомогою диференціально-символьного методу в монографії П.І. Каленюка та З.М. Нитребича [146] досліджується задача Коші для розв'язного відносно старшої похідної за часом лінійного однорідного диференціального рівняння з частинними похідними та сталими коефіцієнтами загалом також нескінченного порядку за просторовими змінними. Знайдено класи існування та єдиності розв'язків досліджуваних задач. У цих класах для шуканих розв'язків побудовано формули у вигляді скінченних сум або збіжних рядів. Запропоновано можливі шляхи переходу від наведених формул розв'язків задач, одержаних за допомогою диференціально-символьного методу, до відомих формул, одержаних іншими методами.

У праці [147] досліджується задача Коші для рівняння вигляду

$$\partial u/\partial t + \varphi(D_x)u = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}, \tag{1.13}$$

з оператором диференціювання $\varphi(D_x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(-iD_x)^k$ нескінченного порядку. Знайдено необхідні й достатні умови, при виконанні яких оператор $\varphi(D_x)$ визначений і є неперервним у просторах типу W, введених в [13]. За умови, що e^{φ} – елемент одного з просторів типу W, а φ – мультиплікатор у такому просторі, доведено коректну розв'язність задачі Коші для рівняння (1.13) з початковою узагальненою функцією f, яка є згортувачем у відповідному просторі. Знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки $F[e^{t\varphi}] * f$, де F – перетворення Фур'є.

Диференціальні рівняння нескінченного порядку вигляду

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k(F, f) = \Phi \tag{1.14}$$

вивчалися в монографії [148]. Тут $D^k(F, \cdot)$ – оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва, породжений цілою функцією $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $a_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, скінченного типу $\sigma \neq 0$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ – довільна функція з простору A_R, $0 < R \leq \infty$, – простору однозначних і аналітичних у крузі $|z| \leq R$ функцій з топологією компактної збіжності (A_R не є нормованим простором, але в той же час A_R – простір Фреше). За означенням, вираз

$$D^n(F, f) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{a_{k-n}}{a_k} z^{k-n}$$

називається узагальненою похідною порядку n функції f, породженою функцією F [148]. Зокрема, якщо $F(z) = e^z$, то $D^n(e^z, f) = d^n f/dz^n$, тобто $D^n(F, f)$ дійсно можна розуміти як узагальнену похідну n-го порядку від функції $f(z)$, породжену (замість функції e^z) функцією $F(z)$. В [148] знайдено умови, за яких рівняння (1.14) має розв'язок, який є цілою функцією певного порядку.

Питання про зображення лінійних неперервних операторів, що діють у просторі A_R, у вигляді диференціальних операторів нескінченного порядку вивчали Ю.Ф. Коробейник у праці [149] та М.І. Нагнибіда у праці [150]. В.В. Подпорін [151] детально розглянув питання про можливість такого зображення для довільних лінійних операторів, котрі неперервно діють у загальних просторах степеневих рядів багатьох змінних. С.С. Лінчук у працях [152–155] дослідив критерії застосовності диференціальних операторів нескінченного порядку відносно узагальненого диференціювання до широкого класу формальних степеневих рядів, наділеного нормальною топологією Кете [156].

Стосовно техніки диференціальних операторів нескінченного порядку відзначимо також, що її формалізм з успіхом використовувався при розв'язуванні багатьох конкретних задач механіки та фізики. Виділимо в цьому напрямку дослідження, проведені в працях [2, 157–159].

1.5. Нелокальні задачі для диференціально-операторних рівнянь та рівнянь з частинними похідними

Останнім часом теорія нелокальних крайових задач набула широкого розвитку. Це обумовлено тим, що такі задачі мають багато застосувань у механіці, фізиці, хімії, біології, екології та інших природничо-наукових дисциплінах, які виникають при математичному моделюванні різних процесів. Прикладами можуть служити задачі, пов'язані з дослідженнями процесів поширення тепла [160–169], вологопереносу у капілярно-пористих середовищах [170, 171], дифузії [172, 173] та деяких теплових процесів [174, 175], обернені задачі для параболічних рівнянь [176–181], а також задачі математичної біології [182] та демографії [183]. Нелокальні задачі мають також практичне застосування при розв'язанні задач механіки твердого тіла [184].

У праці [185] А.М. Нахушев сформулював загальне означення нелокальних умов та навів їх класифікацію. Вперше на доцільність їх використання з точки зору загальної теорії крайових задач вказав О.О. Дезін [186], який досліджував розв'язні розширення диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами. Він показав, що для постановки коректної крайової задачі необхідно використовувати поряд з локальними і нелокальні умови [186–188].

Нелокальні крайові задачі у різних аспектах вивчали багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи: М.Ю. Юнусов [189,190], А.Х. Мамян [191], В.К. Романко [192–199], О.А. Макаров [200,201], Г.І. Лаптєв і С.Г. Крейн [202–204], М.К. Балаєв і С.Я. Якубов [205], А. Біцадзе та О. Самарський [206] та ін.

Проаналізуємо детальніше одержані результати.

У праці [189] розглядалася задача з малим параметром

$$\varepsilon \frac{du_\varepsilon(t)}{dt} - Au_\varepsilon(t) = f(t), \quad t \in (0; b),$$

$$\mu u_\varepsilon(0) - u_\varepsilon(b) = 0.$$

Доведено, що при виконанні умов

$$|A(s)| \geq c > 0, \quad \left|\mu - e^{bA(s)|\varepsilon|}\right| \geq \delta > 0$$

існує єдиний розв'язок, який зображається у вигляді ряду за власними функціями оператора A, а також досліджено властивості розв'язку, зокрема, його поведінку при $\varepsilon \to 0$.

Відзначимо, що А.Х. Мамян [191] встановив, що існують такі диференціальні рівняння з частинними похідними в шарі, для яких неможливо сформулювати жодної коректної локальної задачі; водночас коректні задачі існують, якщо залучити нелокальні умови.

Подальший розвиток досліджень О.О. Дезіна продовжено в циклі робіт В.К. Романка [192–199]. Зокрема, за допомогою операційного числення встановлено умови існування єдиного узагальненого розв'язку для диференціально-операторного рівняння m-го порядку з нелокальними умовами вигляду

$$\sum_{l=0}^{m-1} [\alpha_{jl} u^{(l)}(0) - \beta_{jl} u^{(l)}(T)] = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Праця [197] присвячена вивченню систем двох рівнянь

$$D_t u(t, x) - AP(D_x) u(t, x) = f(t, x),$$

де A – ненульова квадратна матриця, $P(D_x)$ – лінійний диференціальний оператор з комплексними коефіцієнтами. Для цих систем знайдені нелокальні умови

$$\mu_j D_{x_j}^{l_j} u(t,x)|_{x_j=0} = D_{x_j}^{l_j} u(t,x)|_{x_j=b},$$

$$l_j = 0, 1, \ldots, r_j - 1, j = 1, \ldots, n,$$

$$M_1 u(x,0) - M_2 u(x,T) = 0,$$

які визначають правильний оператор. Тут $\mu_j \neq 0$ – комплексні числа, r_j – порядок $P(D_x)$ за змінною x_j, а M_1, M_2 – квадратні комплексні матриці.

Дослідженням крайових задач для диференціально-операторних рівнянь другого порядку в банаховому просторі займалися С.Г. Крейн та Г.І. Лаптєв [202–204]. Вони встановили необхідні й достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку крайової задачі

$$u''(t) - Au(t) = f(t), \quad t \in (0, T],$$

$$\sum_{j=1}^{2} [\alpha_{rj} u^{(j-1)}(0) + \beta_{rj} u^{(j-1)}(T)] = f_r, \quad r = 1, 2,$$

де A – замкнений лінійний (зі всюди щільною у комплексному банаховому просторі E областю визначення) оператор, який є породжуючим оператором аналітичної півгрупи, $u(t)$ і $f(t)$ – функції зі значеннями в E, α_{rj} і β_{rj} – комплексні числа.

Загальна постановка нелокальних крайових задач була сформульована А. Біцадзе та О. Самарським [172, 206] для рівнянь еліптичного і параболічного типів другого порядку з крайовими умовами, які пов'язують значення шуканої функції на частині S границі ∂Q області Q, що розглядається, зі значеннями в образі S при заданому дифеоморфізмі ψ: $S \to \overline{Q}$ (поверхні S на $\psi(S) \in \overline{Q}$), причому на

$\partial Q \setminus \overline{S}$ задаються умови Діріхле. Праця [172] присвячена вивченню однозначної розв'язності модельної задачі

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x = (x_1, x_2) \subset (0,2) \times (0,1),$$

$$u(x_1, 0) = u(x_1, 1) = 0, \quad x_1 \in [0, 2],$$

$$u(0, x_2) = \gamma_1 u(1, x_2), u(2, x_2) = \gamma_2 u(1, x_2), x_2 \in [0, 1],$$

для $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$, при цьому використовувався принцип максимуму. Дослідження у [207–220] стосувалися або узагальнень задачі, сформульованої в [172], у тому числі і на рівняння високого порядку, або ж модельних задач з конкретними відображеннями ψ для еліптичних рівнянь.

Розв'язність нелокальних крайових задач для параболічних рівнянь вивчалася у працях [162–164, 166, 167, 221–230].

У працях [162–164] досліджувалося одновимірне рівняння теплопровідності

$$u_t - u_{xx} = f(t, x), \quad x \in [0, 1], t > 0,$$

з початковою умовою

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1],$$

та нелокальними умовами

$$a_1 u_x(0, t) + b_1 u_x(1, t) + a_0 u(0, t) + b_0 u(1, t) = 0$$

$$c_1 u_x(0, t) + d_1 u_x(1, t) + c_0 u(0, t) + d_0 u(1, t) = 0,$$

а також з умовами

$$\int\limits_0^1 u(x, t) dx = \mu(t), \quad u(0, t) = \nu(t).$$

Встановлено існування класичного розв'язку, отримано двосторонні апріорні оцінки розв'язку задачі, доведено його єдиність і стійкість.

Одновимірне рівняння теплопровідності в області $\{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ вивчалося у [166]. Для нього за допомогою методу інтегральних рівнянь знайдено умови існування розв'язку, що задовольняє умови

$$u(0,t) = \varphi_0(t), \quad u(l,t) = \varphi_l(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(x,0) = \omega(x)u(x,T), \quad \omega \in C(0,l), 0 < \omega(x) < 1,$$

а також за допомогою принципу екстремуму доведено єдиність розв'язку.

У праці [167] одержано аналогічні результати для багатовимірного рівняння теплопровідності в циліндричній області.

Дослідженням деяких крайових задач для параболічного рівняння

$$u_t - a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t)$$

з нелокальними умовами

$$\alpha_1(t)u(a,t) + \alpha_2(t)u(b,t) + \alpha_3(t)u_x(a,t) + \alpha_4(t)u_x(b,t) = 0,$$

$$\beta_1(t)u(a,t) + \beta_2(t)u(b,t) + \beta_3(t)u_x(a,t) + \beta_4(t)u_x(b,t) = 0$$

займався О.І. Кожанов. У праці [222] на основі методу регуляризації він довів розв'язність відповідних крайових задач, а у [223] поширив одержані результати на випадок інтегральних умов.

Питанню розв'язності крайових задач для рівняння теплопровідності

$$u_t = a(t)\Delta u + F(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

де Δ – оператор Лапласа за змінною x, коли коефіцієнт $a(t)$ в інтервалі $(0,T)$ може набувати як додатних, так і від'ємних значень, присвячена робота [230]. Для такого типу рівняння задача Коші із початковою при $t = 0$ умовою некоректна, але, задавши нелокальні умови

$$u(x,0) + hu(x,T) = f(x), \quad h = \text{const},$$

початкова і крайові задачі для вказаного рівняння будуть регулярно розв'язними.

У працях [146,231,232] досліджуються у шарі $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ задачі з нелокальними крайовими умовами за часовою змінною для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними першого порядку за часовою змінною і нескінченного порядку за просторовими координатами. За допомогою операційного (диференціально-символьного) методу виділено класи існування та єдиності розв'язків задач, а також побудовано розв'язки у явному вигляді.

Спектральні властивості нелокальних задач для рівнянь з частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь досліджувалися у монографії [233], вона також містить детальний огляд літератури з цього питання.

Дослідженням нелокальних крайових задач для диференціально-операторних рівнянь займалися В. Чесалін, М. Юрчук та І. Енгельман у [234–239]. Зокрема, у [234] вивчалася задача для абстрактного рівняння Лява

$$u''(t) - A(u(t) + \lambda u''(t)) = f(t), \quad t \in [0,T], \lambda \geq 0,$$

з нелокальними умовами

$$B_1(\mu)u^{(r-1)}(0) - B_2(\mu)u^{(r-1)}(T) = \varphi_r, \quad r = 1, 2,$$

де A – самоспряжений і додатновизначений оператор, $B_1(\mu)$, $B_2(\mu)$ – лінійні неперервні оператори у гільбертовову просторі H; φ_1, $\varphi_2 \in H$, f, u – функції із значеннями в H. Частинний випадок цієї задачі, коли $B_1(\mu) = 1$, $B_2(\mu) = \mu$, розглядався в [235]. У праці [236] досліджувалася задача для диференціально-операторного рівняння

$$\prod_{r=1}^{m}(u''(t) + A_r u(t)) = f(t), \quad t \in [0,T],$$

з умовами

$$u^{(j)}(0) - \mu_j u^{(j)}(T) = \varphi_j, \quad j = \{0, 1, \ldots, 2m-1\},$$

де A_r – самоспряжені і додатновизначені оператори, які попарно комутують. У працях [237–239] одержані результати для ряду важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

Дослідженням двоточкової нелокальної задачі

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Delta_x u(t,x) + f(t,x), \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n,$$

$$\mu u(t,x)|_{t=0} = u(t,x)|_{t=T} + \varphi(x), \quad \mu \in \mathbb{R},$$

займалися Л.І. Корбут та М.І. Матійчук [240]. Вони знайшли розв'язок вказаної задачі, використавши при цьому перетворення Фур'є. Більш загальні нелокальні умови за часовою змінною для параболічних рівнянь були наведені в роботах Дж. Чабровскі [241], В. Шелухіна [242–244], Г. Лібермана [245]. В цих роботах доведено існування розв'язку в класах гладких функцій.

У праці [246] досліджувалася крайова задача

$$u'(t) - Au(t) = 0, \quad t \in (0,a),$$

$$Bu|_{t=0} = Cu|_{t=a}, \tag{1.15}$$

яка розглядалася в гільбертовому просторі $L_2([0,1],H)$ для обмежених операторів $A_1 = A + \lambda I$, B, C. У випадку, коли система власних векторів оператора A_1 утворює базу в H, сформульовані умови регулярності та нерегулярності крайових умов (1.15).

У праці [247] вивчалося питання існування та регулярності розв'язків узагальненої нормальної крайової задачі для квазілінійних параболічних систем.

Питання про існування коректної двоточкової задачі для систем рівнянь

$$u_t(t,x) = Au_x(t,x), \quad t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.16}$$

досліджено в [201]. Матриця-функція $A(\sigma)$ належить до простору нескінченно диференційовних функцій степеневого зростання. Доведено, що для системи (1.16) завжди знайдуться крайові умови вигляду

$$B\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(0,x) + C\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(T,x) = \varphi(x) \tag{1.17}$$

такі, що задача (1.16), (1.17) коректно розв'язна у просторі Соболєва-Слободецького; при цьому знайдено зображення операторів $B\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$ і $C\Big(\dfrac{\partial}{\partial x}\Big)$.

Дослідженням коректної розв'язності задач з нелокальними умовами за змінною t та умовами періодичності або умовами типу умов Діріхле за просторовими змінними x_1, $\ldots$, x_p для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компоненти яких виражаються через параметри задач, займався Б.Й. Пташник та його учні [145,248–257]. Важливими результатами цих досліджень є аналіз оцінок знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язків задач. Розглядалися переважно випадки, коли коефіцієнти (параметри) задачі є незалежними параметрами, дослідження здійснювалися за допомогою метричного підходу.

У працях [145, 257–259] встановлена розв'язність нелокальних багатоточкових задач для безтипних рівнянь і систем таких рівнянь зі сталими коефіцієнтами, що розглядаються в області $\mathcal{D}^p$, у класі просторів Соболєва H_q функцій 2π-періодичних за x. Слід зазначити, що у [145, 253] вперше розглянуто випадок нелокальної задачі з алгебраїчно залежними коефіцієнтами рівняння (вектор, складений із коефіцієнтів рівняння, належить до деякого алгебраїчного многовиду), причому розв'язність задачі в шкалі просторів Соболєва доведено для майже всіх коефіцієнтів алгебраїчної залежності (для майже всіх алгебраїчних многовидів).

Дослідженням нелокальних задач для рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними зі зсувами аргументів займаються В.С. Ільків, О.М. Медвідь, М.М. Симотюк, Т.В Магеровська у [260–263]. Зокрема, у праці [263] в циліндричній області $\mathcal{D}^p = [0,T] \times \Omega^p_{2\pi}$, де $T > 0$, $\Omega^p_{2\pi}$ – p-вимірний тор, розглядається задача

$$\partial_t u = A_1(D)u_{\xi_1} + \cdots + A_Q(D)u_{\xi_Q}, \tag{1.18}$$

$$Mu|_{t=0} - u|_{t=T} = \varphi, \tag{1.19}$$

причому $M = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, число μ_j належить кругу $S_j = \{z \in \mathbb{C} : |z - \theta_j| < R_j\}$, $\theta_j \in \mathbb{C}$, $R_j > 0$, матричні диференціальні вирази $A_j(D) = A_j(-i\partial x_1, \ldots, -i\partial x_p)$ мають сталі комплексні коефіцієнти. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі (1.18), (1.19). Розв'язок шукається у шкалі гільбертових просторів 2π-періодичних за змінною x вектор-функцій з експоненційною поведінкою коефіцієнтів Фур'є. Доведено розв'язність задачі (1.18), (1.19) для майже всіх (за винятком множини як завгодно малої міри) значень вектора параметрів $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ у нелокальних умовах (1.19), а також встановлено оцінки знизу малих знаменників, що виникають при дослідженні гладкості розв'язку.

Дослідженнями задач з нелокальними крайовими умовами у шкалах соболєвських просторів у дійсній області займалося багато авторів [145, 257, 260, 264]. Інтерес представляє поширення результатів теорії нелокальних задач для диференціальних рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними на класи гільбертових просторів Хермандера, які утворюють уточнену соболєвську шкалу у випадку функцій з комплексними змінними.

У праці [265] одержані результати, які присвячені дослідженню у соболєвській шкалі просторів функцій багатьох комплексних змінних задачі з нелокальними двоточковими умовами для рівняння з частинними похідними з оператором диференціювання $B = (B_1, \ldots, B_p)$, де оператор узагальненого диференціювання $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \ldots, p$, діє за комплексною змінною z_j.

Результати, наведені в [265], поширюються зі шкали соболєвських просторів на уточнену шкалу Соболєва у [266]. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі (в циліндричній області $D^p = [0, T] \times S^p$, $T > 0$, $p \geq 2$, $S \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – однозв'язна область) для диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, B\Big) u \equiv \sum_{s_0 + |s| \leq n} a_{s_0, s} B^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = f$$

з нелокальними умовами

$$\mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=T} = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

де $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \cdots + s_p$, $a_{s_0,s} \in \mathbb{C}$, $a_{n,0} = 1$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\varphi_0 = \varphi_0(z)$, $\varphi_1 = \varphi_1(z)$, $\ldots$, $\varphi_{m-1} = \varphi_{m-1}(z)$, $f = f(t, z)$ – задані функції, $B^s = B_1^{s_1} \ldots B_p^{s_p}$ – векторний оператор з операторів узагальненого диференціювання $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, причому $B_j^0 u \equiv u$, $B_j^l u = B_j(B_j^{l-1} u)$, $(j = 1, \ldots, p,\ l = 1, \ldots, n)$ і $B_j(z^k) = k_j z^k$, у просторі W' (простір узагальнених функцій, які є формальними рядами Лорана).

У праці [267] встановлено умови однозначної розв'язності нелокальних крайових задач для однорідних та неоднорідних диференціальних рівнянь з оператором диференціювання $B = (B_1, \ldots, B_p)$ $(B_j = z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \ldots, p)$ у класі функцій багатьох комплексних змінних. Доведено теореми метричного характеру про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язків досліджуваних задач, з яких випливає їх однозначна розв'язність у просторах функцій, що є рядами Діріхле-Тейлора із заданим спектром, для майже всіх векторів, компоненти яких виражаються через коефіцієнти рівнянь та параметри крайових умов. Частковий випадок даних задач з цілочисловим спектром досліджено в роботі [265]; особливості випадку $p = 1$ встановлено в [268].

Задачі з нелокальними умовами виникають у теорії періодичних хвилеводів. У праці [269] досліджується диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt}\Big(p(t)\frac{dz}{dt}\Big) + Q(t)z + f(t,z) = 0, \quad 0 < t < \omega,$$

у гільбертовому просторі H з умовами

$$z(\omega) = \rho z(0), z'(\omega) = \rho z'(0), |\rho| = 1,$$

причому оператор $p(t)$ обмежений і додатно визначений в H для кожного $t \in [0, \omega]$, $f(t,z)$ – обмежений оператор при кожному $t \in (0, \omega)$, оператор $Q(t)$ має, взагалі кажучи, залежну від t область визначення. Доведено розв'язність вказаної задачі, яка є еквівалентною існуванню стаціонарної точки деякого функціоналу.

Критерії коректності нелокальних крайових задач у смузі $\Pi = \mathbb{R}^n \times [0, T]$ для диференціально-операторного рівняння вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(-iD_x)u, \tag{1.20}$$

наведені в працях [270–272]. Зокрема, у випадку двоточкової за часом задачі для рівняння (1.20) з умовою

$$Au(x,0) - u(x,T) = u_0(x)$$

критерій коректності в класі функцій степеневого зростання формулюється у вигляді виконання умови

$$A - e^{TP(\lambda)} \neq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n,$$

де $A = A(Ix)$, $A(\sigma)$ – поліном зі сталими коефіцієнтами.

Дослідження класичних та узагальнених розв'язків нелокальних задач для майже лінійних і квазілінійних гіперболічних рівнянь і систем рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними проводив І.Я. Кміть у [273, 274].

Дослідженню в банаховому просторі крайової задачі для диференціально-операторного рівняння другого порядку

$$u''(t) = Au'(t) + g(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$L_i u = \alpha_{i1}u(0) + \alpha_{i2}u'(0) + \beta_{i1}u(T) + \beta_{i2}u'(T) = f_i, \quad i = 1, 2,$$

присвячена праця [275]. Отримано необхідну умову коректності: $\sigma(A) \cap \Lambda = \emptyset$, де $\sigma(A)$ – спектр оператора A, Λ – множина власних значень скалярної задачі

$$y''(t) = \lambda y(t), \quad L_1 y = L_2 y = 0.$$

Для рівняння

$$y^m u_{xx} - u_y y - b - 2y^m u = 0$$

в прямокутнику $\{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < T\}$, де $m > 0$, $b \geq 0$, $T > 0$, методом спектрального аналізу в [276] доведено теореми єдиності та існування розв'язку задачі з початковими умовами

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_y(x, 0) = \nu(x), \quad x \in [0; 1],$$

і нелокальними умовами

$$u(0, y) = u(1, y), \quad u_x(0, y) = 0, \quad y \in [0, T],$$

або

$$u_x(0, y) = u_x(1, y), \quad u(1, y) = 0, \quad y \in [0, T].$$

Розв'язки задач побудовано у вигляді суми біортогонального ряду.

У праці [277] вивчалася задача для рівняння мішаного типу

$$(1 - \operatorname{sgn} t)u_{tt} - (1 - \operatorname{sgn} t)u_t = 2u_{xx}$$

в області $\{(x,t) : 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, де α, β – задані додатні числа, з умовами

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta,$$

$$u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Встановлено критерій єдиності розв'язку, який побудований у вигляді суми ряду Фур'є, а також стійкість розв'язку за нелокальною умовою $\varphi(x)$.

Нелокальні багатоточкові сингулярні параболічні задачі (зокрема, двоточкова задача) досліджені в [9]. Побудовано функції Гріна відповідних задач, досліджено їхні властивості, знайдено зображення розв'язків у вигляді об'ємних потенціалів.

Коректна розв'язність двоточкової крайової задачі для B-параболічного рівняння з оператором дробового диференціювання, який відповідає сингулярному параболічному оператору Бельтрамі-Лапласа на поверхні із класу Діні, вивчалася М.І. Матійчуком у монографії [278].

У праці [279] досліджена двоточкова задача для псевдодиференціального рівняння параболічного типу з оператором, побудованим за негладким символом, незалежним від просторових змінних, та крайовою умовою, яка визначається узагальненою функцією скінченного порядку, а у [280, 281] вивчається m-точкова задача ($m \geq 2$) для зазначеного псевдодиференціального рівняння. Методика дослідження такої задачі відрізняється від дослідження двоточкової задачі, а простори узагальнених функцій описані в працях [22, 27, 127]. У праці [282] встановлена класична розв'язність двоточкової задачі, коли символ псевдодиференціального оператора сталий і не містить молодших членів. Коректна розв'язність багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами в просторах узагальнених періодичних функцій доведена в [283]. В.В. Городецький та Я.М. Дрінь [284, 285] аналогічний результат отримали для еволюційного рівняння з оператором $\varphi(A)$, де φ – ціла функція від псевдодиференціального оператора A у випадку, коли гранична умова є узагальненою функцією типу розподілів Соболєва-Шварца.

У працях [286–289] розвинено методику дослідження фундаментального розв'язку багатоточкової за часом задачі (ФРБЗ) для еволюційних рівнянь з псевдобесселевими операторами скінченного та нескінченного порядків, доведено коректну розв'язність вказаної задачі у спеціальному просторі узагальнених функцій, знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки ФРБЗ з граничною функцією. Встановлено, що за певних обмежень на граничну функцію розв'язок m-точкової задачі володіє властивістю локалізації (локального посилення збіжності).

У монографії [290] будуються нові класи псевдодиференціальних операторів та параболічних псевдодиференціальних рівнянь, для яких розвивається теорія задачі Коші та нелокальних задач з початковими та граничними даними із просторів узагальнених функцій типу розподілів.

Розділ 2. Стабілізація розв'язків нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з операторами диференціювання нескінченного порядку

Встановлена коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом $t \in (0, +\infty)$ задачі для еволюційного рівняння з оператором диференціювання нескінченного порядку, який діє в узагальненому просторі типу S у випадку, коли початкова функція є елементом простору узагальнених функцій типу S'. Досліджені властивості фундаментального розв'язку задачі, поведінка розв'язку $u(t, x)$ при $t \to +\infty$ у просторі узагальнених функцій типу S' (слабка стабілізація), а також рівномірна стабілізація розв'язку до нуля. Окремо розглянуто випадок, коли псевдодиференціальний оператор $A_\varphi = F^{-1}[\varphi F]$ (оператор диференціювання нескінченного порядку) діє в просторах $S_\alpha^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$.

2.1. Узагальнені простори типу S та S'

І.М. Гельфанд і Г.Є. Шилов у відомій монографії [22] запропонували метод побудови функціональних просторів нескінченно диференційовних функцій, заданих на $\mathbb{R}$, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності та зростання похідних із збільшенням порядку. Ці умови задаються за допомогою нерівностей $|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{kn}$, $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$, де $\{c_{kn}\}$ – подвійна послідовність додатних чисел. Якщо ці числа змінюються довільним чином разом з функцією φ, то маємо простір Л. Шварца $S = S(\mathbb{R})$ швидко спадних на $\mathbb{R}$ функцій. Якщо $c_{kn} = a_k b_n$, де $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – деякі послідовності додатних чисел, то маємо узагальнені простори типу S, які позначаються символом $S_{a_k}^{b_n}$. У монографії [22] детально вивчений випадок, коли $a_k = k^{k\alpha}$, $\alpha > 0$, $b_n = n^{n\beta}$, $\beta > 0$; відповідні простори називаються просторами типу S і позначаються символом S_{α}^{β}. У [291] вивчаються простори $S_{a_k}^{b_n}$ (їх топологічна структура, властивості функцій, основні операції в таких просторах). Відомі простори типу W, введені Б.Л. Гуревичем [300] (див. також [13]), в яких для характеристики поведінки функцій на нескінченності замість степеневих функцій використовуються опуклі функції, також вкладаються в простори $S_{a_k}^{b_n}$ при конкретному виборі послідовностей $\{a_k\}$ та $\{b_n\}$ (див. також [301]).

Тут зупинимося на просторах $S_{a_k}^{b_n}$, які будуються за послідовностями вигляду $\{b_n = n!\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{a_k = k!d_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, де $\{\rho_n\}$, $\rho_0 = 1$, – послідовність додатних чисел, яка володіє властивостями: а) вона монотонно спадна; б) $\exists c_b > 0$ $\exists \gamma_1 \in (0,1)$ $\forall n \in \mathbb{N} : \rho_{n-1}/\rho_n \leq c_b \cdot n^{\gamma_1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$; г) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists c_\varepsilon > 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+ :\ \rho_n \geq c_\varepsilon \cdot \varepsilon^n/n^n$. Послідовність $\{d_k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$, $d_0 = 1$, також володіє властивостями а)–г), при цьому умова б) має вигляд: $\exists c_a > 0$ $\exists \gamma_2 \in (0,1)$ $\forall n \in \mathbb{N} : d_{k-1}/d_k \leq c_a \cdot k^{\gamma_2}$. Прикладом послідовності $\{\rho_n\}$ з властивостями а)–г) може служити послідовність $\rho_n = (n\beta)^{-n\beta}e^{n\beta}$, де $\beta \in (0,1)$ – фіксований параметр.

Перевіримо, наприклад, виконання для цієї послідовності властивості г). Маємо, що

$$\rho_n = \frac{e^{n\beta}}{(n\beta)^{n\beta}} = \frac{e^{n\beta}}{(n\beta)^{n\beta}} \cdot \frac{[n(1-\beta)]^{n(1-\beta)}}{[n(1-\beta)]^{n(1-\beta)}} \cdot \frac{e^{n(1-\beta)}}{e^{n(1-\beta)}} =$$

$$= \frac{e^n}{n^n} \frac{1}{[\beta^\beta (1-\beta)^{1-\beta}]^n} \cdot \frac{[n(1-\beta)]^{n(1-\beta)}}{e^{n(1-\beta)}} =$$

$$= \frac{e^n}{n^n} \frac{1}{\omega^n} \sup_{\lambda \geq 0} \frac{\lambda^n}{\exp\{\lambda^{1/(1-\beta)}\}},$$

де $\omega = \beta^\beta (1-\beta)^{1-\beta} < 1$. Якщо взяти довільне $\varepsilon > 0$ і покласти $\lambda = \varepsilon$, то прийдемо до нерівності $\rho_n \geq c_\varepsilon \varepsilon^n/n^n$, де $c_\varepsilon = \exp\{-\varepsilon^{1/(1-\beta)}\}$. Зазначимо, що умова б) для цієї послідовності виконується з параметром $\gamma_1 = \beta$.

Вважаємо також, що параметри γ_1, γ_2 в умові б) для послідовностей $\{\rho_n\}$ та $\{d_k\}$ пов'язані умовою: $\gamma_1 + \gamma_2 = \theta \leq 1$.

Символом $S_{a_k}^{b_n}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умову

$$\exists\, c, A, B > 0\ \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+\ \forall x \in \mathbb{R} : |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq cA^k B^n a_k b_n.$$

$S_{a_k}^{b_n}$ співпадає з об'єднанням зліченно-нормованих просторів $S_{a_k,\,A}^{b_n,\,B}$ за всіма індексами $\{A, B\} \subset \mathbb{N}$, де символом $S_{a_k,\,A}^{b_n,\,B}$ позначається сукупність тих функцій $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$, котрі для довільних $\delta, \rho > 0$ задовольняють нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{\delta\rho}(A+\delta)^k (B+\rho)^n a_k b_n,\ \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R};$$

система норм в $S_{a_k,\,A}^{b_n,\,B}$ визначається за допомогою формул

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^n a_k b_n},\ \{\delta, \rho\} \subset \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}.$$

В [291] встановлено, що функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ належить до простору $S_{a_k}^{b_n}$, де $a_k = k! d_k$, $b_n = n! \rho_n$, тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z),\ z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову:

$$\exists a, b, c > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C} : |\varphi(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by),$$

де

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} |x| < 1, \\ \inf\limits_k (a_k/|x|^k), & |x| \geq 1, \end{cases}$$

$$\rho(y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} |y| < 1, \\ \sup\limits_n (|y|^n/b_n), & |y| \geq 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Зауважимо, що ρ – неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty)$. Із властивості г) випливає також (див. [291]), що

$$\exists\, c_0, c > 0\ \forall y \in \mathbb{R} : \rho(y) \geq c_0 \exp(c|y|).$$

Наприклад, якщо $b_n = n^{n\beta}$, $0 < \beta < 1$, то $\rho(y) \sim \exp\{|y|^{1/\beta}\}$. Крім того, як доведено в [291], $\ln \rho$ – опукла на $(0, +\infty)$ функція в тому сенсі, що

$$\forall \{y_1, y_2\} \subset (0, +\infty) : \ \ln \rho(y_1) + \ln \rho(y_2) \leq \ln \rho(y_1 + y_2). \quad (2.2)$$

З (2.2) випливає також нерівність $\ln \rho(y_1) - \ln \rho(y_1 + y_2) \leq -\ln \rho(y_2)$.

Функція ρ в (2.1) пов'язана з послідовністю $\{\rho_n\}$, за якою будується послідовність $\{b_n = n!\rho_n\}$ так [291]:

$$\rho_n = \inf_{|\omega| \geq 1} (\rho(\omega)/|\omega|^n) = \nu_n^{-n} \rho(\nu_n),$$

де ν_n – розв'язок рівняння $\omega\mu(\omega) = n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mu(\omega) = \rho'(\omega)/\rho(\omega)$; послідовність $\{\nu_n\}$ є монотонно зростаючою й необмеженою, $\nu_n < n$, $n \in \mathbb{N}$. Відповідно, функція γ в (2.1) пов'язана з послідовністю $\{d_k\}$, за якою будується послідовність $\{a_k = k!d_k\}$ так:

$$d_k = \sup_{|\omega| \geq 1} (\gamma(\omega)/|\omega|^k) = \mu_k^k \gamma(\mu_k),$$

де μ_k – розв'язок рівняння $\omega\alpha(\omega) = k$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha(\omega) = \gamma'(\omega)/\gamma(\omega)$; послідовність $\{\mu_k\}$ є монотонно зростаючою й необмеженою, $\mu_k < k$, $k \in \mathbb{N}$.

Оскільки $\gamma(x) = 1/\tilde{\gamma}(x)$, де $\tilde{\gamma}(x) = 1$, $|x| < 1$ і $\tilde{\gamma}(x) = \sup\limits_k (|x|^k/a_k)$, якщо $|x| \geq 1$, то γ – неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно спадає на $[1, +\infty]$, $0 < \gamma(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Наприклад, якщо $a_k = k^{k\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, то справджуються нерівності [22]: $\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right\} \leq \gamma(x) \leq c \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right\}$, $c = \exp\{\alpha e/2\}$. Функція $\ln \gamma$ задовольняє на $(0, +\infty)$ нерівність [291]

$$\ln \gamma(x_1) + \ln \gamma(x_2) \geq \ln \gamma(x_1 + x_2), \ \{x_1, x_2\} \subset (0, +\infty). \quad (2.3)$$

Із результатів, наведених в [291], випливає, що послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset S_{a_k}^{b_n}$ збігається до нуля в цьому просторі, якщо функції φ_ν та їхні похідні довільного порядку збігаються до нуля рівномірно на кожному відрізку

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ і при цьому виконуються нерівності

$$|x^k \varphi_\nu^{(n)}(x)| \leq cA^k B^n a_k b_n, \ \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+, \ x \in \mathbb{R},$$

з деякими сталими $c, A, B > 0$, не залежними від ν.

Функція g називається мультиплікатором у просторі $S_{a_k}^{b_n}$, якщо $g\psi \in S_{a_k}^{b_n}$ для довільної функції $\psi \in S_{a_k}^{b_n}$ і відображення $\psi \to g\psi$ є лінійним і неперервним оператором з $S_{a_k}^{b_n}$ в $S_{a_k}^{b_n}$. Мультиплікатором у просторі $S_{a_k}^{b_n}$, $a_k = k!d_k$, $b_n = n!\rho_n$, є функція $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, яка допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умову [291]:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 : \ |g(z)| \leq c_\varepsilon (\gamma(\varepsilon x))^{-1} \rho(\varepsilon y), \ z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

У введених просторах $S_{a_k}^{b_n}$, $a_k = k!d_k$, $b_n = n!\rho_n$, визначені й неперервні оператори, важливі для аналізу; в першу чергу, це оператори множення на x, на всі поліноми, оператори диференціювання, зсуву та розтягу [291]. Зокрема, операція зсуву аргумента $T_x : \varphi(\xi) \to \varphi(\xi + x)$ є диференційовною у зазначених просторах $S_{a_k}^{b_n}$ (навіть нескінченно диференційовною) у тому розумінні, що граничні співвідношення вигляду $(\varphi(x+h) - \varphi(x))h^{-1} \to \varphi'(x)$, $h \to 0$, справджуються для кожної функції $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$ в сенсі збіжності за топологією простору $S_{a_k}^{b_n}$. Простори $S_{a_k}^{b_n}$ є досконалими (тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні); вони пов'язані між собою за допомогою перетворенням Фур'є, а саме, правильною є формула [291]: $F[S_{a_k}^{b_n}] = S_{b_k}^{a_n}$, де

$$F\left[S_{a_k}^{b_n}\right] = \left\{ \psi : \ \psi(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \ \varphi \in S_{a_k}^{b_n} \right\}.$$

Зокрема, $F[S_{k^{k\alpha}}^{n^{n\beta}}] = S_{k^{k\beta}}^{n^{n\alpha}}$ або $F[S_\alpha^\beta] = S_\beta^\alpha$.

Із властивостей перетворення Фур'є у просторах типу S випливає, що в просторі $S_{a_k}^{b_n}$ визначений і є неперервним псевдодиференціальний оператор $A_\varphi\psi = F^{-1}_{\sigma\to x}[\varphi(\sigma)F_{x\to\sigma}[\psi]]$, $\forall\psi \in S^{b_n}_{a_k}$, побудований за функцією (символом) φ, яка є мультиплікатором у просторі $S^{a_n}_{b_k}$. Якщо оператор A_φ діє в просторі $S^{b_n}_{b_k}$, $b_n = n!\rho_n$, то оператор A_φ можна також розуміти як оператор диференціювання "нескінченного порядку": якщо $\varphi(\sigma) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\sigma^k$, то для довільної функції $\psi \in S^{b_n}_{b_k}$ маємо, що

$$A_\varphi\psi = F^{-1}_{\sigma\to x}\left[\varphi(\sigma)F_{x\to\sigma}[\psi](\sigma)\right] = F^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k\sigma^k F[\psi]\right] =$$

$$= F^{-1}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k\sigma^k F[\psi]\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k F^{-1}\left[\sigma^k F[\psi]\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k\left[(iD_x)^k\psi\right](x), \quad D_x = d/dx; \tag{2.4}$$

тут ми скористалися формулами, які пов'язують перетворення Фур'є з операцією диференціювання, а саме,

$$D_x^m F[\psi] = F[(ix)^m\psi], \ F[D_x^m\psi](x) = (ix)^m F[\psi](x),$$

$$D_x^m\psi = F^{-1}[(-ix)^m F[\psi]].$$

Коректність проведених в (2.4) перетворень випливає із співвідношення

$$r_{n,\psi}(\sigma) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\sigma^k F[\psi](\sigma) \to 0, \ n\to\infty, \tag{2.5}$$

яке справджується в просторі $S^{b_n}_{a_k}$; при доведенні (2.5) використовуються властивості перетворення Фур'є у просторах типу $S^{b_n}_{a_k}$, а також властивості послідовностей $\{a_k\}$, $\{b_n\}$.

Зупинимось більш детально на просторах S_α^β, які, як вже зазначалось, будуються за послідовностями $\{a_k = k^{k\alpha}\}$ $\alpha > 0$, $\{b_n = n^{n\beta}\}$, $\beta > 0$. А саме,

$$S_\alpha^\beta := \{\varphi \in S \mid \exists c > 0\; \exists A > 0\; \exists B > 0\; \forall \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+\; \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k \varphi^{(m)}(x)| \le cA^k B^m k^{k\alpha} m^{m\beta}\}.$$

Простір S_α^β можна охарактеризувати ще й так [22]: S_α^β складається з тих й лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(m)}(x)| \le c_1 B_1^m m^{m\beta} \exp\{-c_2|x|^{1/\alpha}\},\; m \in \mathbb{Z}_+,\; x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c_1, B_1, c_2, залежними від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \ge 1 - \beta$, то S_α^β складається з тих й лише тих функцій φ, які допускають аналітичне продовження в комплексну площину і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x+iy)| \le c_3 \exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\},\; c_3,\; a,\; b > 0,$$

$$\{x,y\} \subset \mathbb{R}.$$

Простори S_α^β нетривіальні, якщо $\alpha + \beta \ge 1$; для довільних $\alpha, \beta > 0$ правильною є рівність: $S_\alpha^\beta = S_\alpha \cap S^\beta$ [51].

Топологічна структура в просторах S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову:

$$\forall \bar{A} > A\; \forall \bar{B} > B :\; |x^k \varphi^{(m)}(x)| \le c\bar{A}^{\,k} \bar{B}^{\,m} k^{k\alpha} m^{m\beta},\; x \in \mathbb{R},$$

$$\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Ця множина перетворюється у повний зліченно-нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,m} \frac{|x^k \varphi^{(m)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^m k^{k\alpha} m^{m\beta}},\; \{\delta, \rho\} \subset \{1, \frac{1}{2}, \ldots\}.$$

Якщо $A_1 < A_2,\ B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_{\alpha}^{\beta} = \bigcup\limits_{A,B>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$.

Символом $(S_{a_k}^{b_n})'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Якщо $f \in (S_{a_k}^{b_n})'$, то до цього ж простору належить також кожна похідна $f^{(p)},\ p \in \mathbb{N}$ (тобто, елементи простору $(S_{a_k}^{b_n})'$ є нескінченно диференційовними), зсув $f(ay+b),\ a \neq 0$, добуток αf, де α – мультиплікатор у просторі основних функцій.

Оскільки в основному просторі $S_{a_k}^{b_n}$ визначена операція зсуву аргумента $T_x:\ \psi(\xi) \to \psi(\xi + x)$, то згортку узагальненої функції $f \in (S_{a_k}^{b_n})'$ з основною задамо формулою

$$(f * \psi)(x) := \langle f_\xi, T_{-x}\check{\psi}(\xi)\rangle \equiv \langle f_\xi, \psi(x-\xi)\rangle;$$

(індекс ξ у f_ξ означає, що функціонал f діє на ψ як функцію аргумента ξ, $\check{\psi}(\xi) = \psi(-\xi)$); при цьому $f * \psi$ є звичайною нескінченно диференційовною функцією. Якщо $f * \psi \in S_{a_k}^{b_n}$ для довільної функції $\psi \in S_{a_k}^{b_n}$ та із співвідношення $\psi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору $S_{a_k}^{b_n}$ випливає, що $f * \psi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору $S_{a_k}^{b_n}$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $S_{a_k}^{b_n}$.

Оскільки кожний простір типу S разом з кожною функцією $\psi(x)$ містить також функцію $\psi(-x)$ і $F^{-1}[\psi] = (2\pi)^{-1}F[\psi(-\xi)]$, то перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_{a_k}^{b_n})'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F[f], \psi\rangle = \langle f, F[\psi]\rangle,\ \forall \psi \in S_{b_k}^{a_n},$$

при цьому $F[f] \in (S_{b_k}^{a_n})'$. Якщо $f \in (S_{a_k}^{b_n})'$ – згортувач у просторі $S_{a_k}^{b_n}$, то для довільної функції $\psi \in S_{a_k}^{b_n}$ правильною є формула [291]: $F[f * \psi] = F[f] \cdot F[\psi]$.

Нехай X – топологічний простір, K – деяка множина чисел. Функцію $K \ni \nu \to \varphi_\nu \in X$ називають абстрактною функцією параметра ν в просторі X. Про властивості абстрактних функцій див. [22]. Зокрема, абстрактна функція називається диференційовною у точці $\nu_0 \in K$, якщо в просторі X існує границя

$$\frac{d\varphi}{d\nu}\Big|_{\nu=\nu_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_{\nu_0+h} - \varphi_{\nu_0}}{h}.$$

Якщо абстрактна функція φ_ν диференційовна в точці $\nu \in K$, функціонал $f_\nu \in X'$ – слабко диференційовна функція параметра ν, то $\langle f_\nu, \varphi_\nu\rangle$ – диференційовна функція, причому

$$\frac{d}{d\nu}\langle f_\nu, \varphi_\nu\rangle = \langle \frac{df_\nu}{d\nu}, \varphi_\nu\rangle + \langle f_\nu, \frac{d\varphi_\nu}{d\nu}\rangle.$$

2.2. Коректна розв'язність нелокальної m-точкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з оператором диференціювання нескінченного порядку

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t = A_\varphi u(t,x),\ (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (2.6)$$

де $A_\varphi = F^{-1}_{\sigma\to x}[\varphi(\sigma)F_{x\to\sigma}]$ – псевдодиференціальний оператор у просторі $S^{b_n}_{b_k}$, побудований за функцією $\varphi(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, яка є мультиплікатором у цьому просторі і такою, що $e^\varphi \in S^{b_n}_{b_k}$ (нагадаємо (див. п. 2.1), що в цьому випадку оператор A_φ можна розуміти як оператор диференціювання “нескінченного порядку” у просторі $S^{b_n}_{b_k}$). Символом $P^{b_n}_{b_k}$ позначимо клас функцій (символів) φ, які задовольняють вказані умови.

Наприклад, нехай $\varphi(\sigma) = -\sigma^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$. У цьому випадку $A_\varphi = F^{-1}[-\sigma^2 F] = -(iD_x)^2 = D_x^2$, а рівняння (2.6) – рівняння теплопровідності $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$. Оскільки

$$|e^{-z^2}| = |e^{-(\sigma+iy)^2}| = e^{-\sigma^2+y^2},$$

то звідси та з характеристики просторів S_α^β випливає, що $e^{-\sigma^2} \in S_{1/2}^{1/2} \equiv S_{k^{k/2}}^{n^{n/2}}$. Крім того, функція $-\sigma^2$ – мультиплікатор в просторі $S_{1/2}^{1/2}$. Отже, функція $\varphi(\sigma) = -\sigma^2$ є елементом класу $P_{k^{k/2}}^{n^{n/2}}$, при цьому послідовність $\{b_n\}$ має вигляд: $b_n = n^{n/2} = n^n \cdot \rho_n$, де $\rho_n \sim (n/2)^{-n/2} e^{n/2}$.

Надалі вважатимемо, що послідовність $\{b_n\}$ задовольняє умову д):

$$\exists A > 0 \, \exists \tilde{L} > 0 \, \forall \{n, l\} \subset \mathbb{Z}_+ : \, b_n \cdot b_l \leq A \tilde{L}^{n+l} b_{n+l}.$$

Для рівняння (2.6) задамо нелокальну багатоточкову (m – точкову) за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (2.6), який задовольняє умову:

$$\mu u(t, \cdot)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t, \cdot)|_{t=t_k} = f, \tag{2.7}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, +\infty)$ – фіксовані числа, причому $\mu > m \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < +\infty$, $f \in S_{b_k}^{b_n}$.

Розв'язок задачі (2.6), (2.7) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є у вигляді $u(t, x) = F_{\sigma \to x}^{-1}[v(t, \sigma)]$. Для функції $v : \Omega \to \mathbb{R}$ дістаємо задачу з параметром σ:

$$\frac{dv(t, \sigma)}{dt} = \varphi(\sigma) v(t, \sigma), \; (t, \sigma) \in \Omega, \tag{2.8}$$

$$\mu v(t, \sigma)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k v(t, \sigma)|_{t=t_k} = \tilde{f}(\sigma), \; \sigma \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

де $\tilde{f}(\sigma) = F^{-1}[f](\sigma)$. Загальнений розв'язок рівняння (2.8) має вигляд

$$v(t, \sigma) = c \exp\{t \varphi(\sigma)\}, \; (t, \sigma) \in \Omega, \tag{2.10}$$

де $c = c(\sigma)$ визначимо з умови (2.9). Підставивши (2.10) в (2.9), знайдемо, що

$$c = \widetilde{f}(\sigma)\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k \varphi(\sigma)\}\right)^{-1}, \quad \sigma \subset \mathbb{R}.$$

Отже, формальним розв'язком задачі (2.6), (2.7) є функція

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} v(t,\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma.$$

Введемо позначення: $G(t,x) = F^{-1}_{\sigma \to x}\left[Q(t,\sigma)\right](x)$, де $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma)$,

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\}, Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k \varphi(\sigma)\}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\right)^{-1}.$$

Тоді, міркуючи формально, знайдемо, що

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi) f(\xi) d\xi = G(t,x) * f(x), \quad (t,x) \in \Omega.$$

Справді,

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{-i\sigma\xi} d\xi\right) e^{i\sigma x} d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left((2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma) e^{i\sigma(x-\xi)} d\sigma\right) f(\xi) d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} G(t, x-\xi) f(\xi) d\xi = G(t,x) * f(x), \quad (t,x) \in \Omega. \quad (2.11)$$

Коректність проведення тут перетворень та збіжність відповідних інтегралів, а отже, правильність формули (2.11) випливає з властивостей функції G, які ми наведемо нижче. Властивості функції G пов'язані з властивостями функції Q, оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Отже, передусім дослідимо властивості функції $Q(t,\sigma)$ як функції аргумента σ.

Оскільки $\varphi \in P_{b_k}^{b_n}$, то $e^{\varphi} \in S_{b_k}^{b_n}$. Тоді (див. п. 2.1), існують числа $c_0, a, b > 0$, такі, що

$$|e^{\varphi(z)}| \leq c_0 e^{-\ln \tilde{\gamma}(a\sigma) + \ln \rho(b\tau)}, \ \ \tilde{\gamma} = 1/\gamma = \rho, \ z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} \quad (2.12)$$

Надалі вважатимемо, що стала $c_0 > 0$ в нерівності (2.12) задовольняє умову: $c_0 \leq 1$. Тоді

$$|e^{t\varphi(z)}| = |e^{\varphi(z)}|^t \leq [c_0 \exp\{-\ln \tilde{\gamma}(a\sigma) + \ln \rho(b\tau)\}]^t \leq$$

$$\leq \exp\{-t \ln \tilde{\gamma}(a\sigma) + t \ln \rho(b\tau)\}. \quad (2.13)$$

Із нерівності (2.13) випливає, що $Q_1(t, \cdot) \in S_{b_k}^{b_n}, \ b_n = n!\rho_n$, при кожному $t \in (0, +\infty)$.

Лема 2.1. *Нехай* $\varphi \in P_{b_k}^{b_n}$. *Для функції* $Q_1(t,\sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, *та її похідних (за змінною* σ*) правильними є оцінки*

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \leq \tilde{b}^s t^s s! \rho_s \exp\{-t \ln \tilde{\gamma}(\tilde{a}\sigma)\}, \ s \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.14)$$

де $\rho_s = \inf\limits_{\tau} (\rho(\tau)/|\tau|^s)$, *сталі* $\tilde{a}, \ \tilde{b} > 0$ *не залежать від* t.

Доведення. Для $t > 1$ справджується нерівність $t \ln \rho(b\tau) \leq \ln \rho(bt\tau)$, $\tau \in [0, \infty)$. Ця властивість випливає із співвідношень

$$\ln \rho(bt\tau) = \int\limits_0^{tb\tau} \mu(\xi) d\xi = t \int\limits_0^{b\tau} \mu(ty) dy \geq t \int\limits_0^{b\tau} \mu(y) dy = t \ln \rho(b\tau),$$

де $\mu(\xi) = \rho'(\xi)/\rho(\xi)$, при цьому μ – невід'ємна, неперервна на $\mathbb{R}$ функція, монотонно зростаюча на проміжку $[0, \infty)$. Тоді

$$|Q_1(t,z)| \leq \exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma) + \ln\rho(tb\tau)\},\ z \in \mathbb{C},\ t > 1. \tag{2.15}$$

Внаслідок інтегральної формули Коші маємо, що

$$D_\sigma^s Q_1(t,\sigma) = \frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{Q_1(t,z)}{(z-\sigma)^{s+1}}dz,\ s \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $\sigma \in \mathbb{R}$. Скориставшись (2.15), прийдемо до нерівностей

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \leq \frac{s!}{R^s}\max_{z\in\Gamma_R}|Q_1(t,z)| \leq$$

$$\leq \frac{s!}{R^s}\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma_0) + \ln\rho(tb\tau)\},$$

де σ_0 – точка максимума функції $\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\xi)\}$, $\xi \in [\sigma - R,\ \sigma + R]$. Оскільки $\ln\tilde{\gamma}(a\xi)$ – парна на $\mathbb{R}$ функція, яка зростає на проміжку $[0, +\infty)$, то

$$\sigma_0 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |\xi| \leq R, \\ \sigma + R, & \text{якщо } \xi \leq -R, \\ \sigma - R, & \text{якщо } \xi \geq R. \end{cases}$$

Використовуючи нерівність $-\ln\tilde{\gamma}(\sigma_1+\sigma_2) + \ln\tilde{\gamma}(\sigma_1) \leq -\ln\tilde{\gamma}(\sigma_2)$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, доводимо існування сталих $\tilde{a}$, $a_2 > 0$, $\tilde{a} \leq a$, таких, що

$$\forall\sigma \geq 0,\ \forall R > 0 : \exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma_0)\} \leq$$

$$\leq \exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(\tilde{a}\sigma)\exp\{t\ln\tilde{\gamma}(a_2 R)\}.$$

Тоді

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \leq \frac{s!}{R^s}\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(\tilde{a}\sigma)\}\exp\{t\ln\tilde{\gamma}(a_2 R)\}\times$$

$$\times \exp\{\ln\rho(tbR)\} \leq \frac{s!}{R^s}\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(\tilde{a}\sigma)\}\exp\{\ln\rho(t\tilde{b}R)\},$$

$$\tilde{b} = b + a_2.$$

Тут ми скористалися тим, що $\tilde{\gamma} = \rho$, а також нерівністю опуклості для функції $\ln\rho : \ln\rho(tbR) + \ln\rho(ta_2R) \leq \ln\rho(t(b+a_2)R)$.

Для кожного $s \in \mathbb{Z}_+$ функція $g_{s,t}(R) = R^{-s}\exp\{\ln\rho(t\tilde{b}R)\} = R^{-s}\rho(t\tilde{b}R)$ є диференційовною на $(0,+\infty)$, причому із властивостей функції ρ випливають співвідношення

$$\lim_{R\to+\infty} g_{s,t}(R) = +\infty,\ s\in\mathbb{Z}_+;\ \lim_{R\to+0} g_{s,t}(R) = \begin{cases} +\infty, & s\in\mathbb{N}, \\ 1, & s=0. \end{cases}$$

Оскільки $g_{s,t}(R) > 0,\ R\in(0,+\infty)$, то ця функція досягає свого інфімуму. Отже,

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \leq s!\inf_R g_{s,t}(R)\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(\tilde{a}\sigma)\} =$$

$$= s!\tilde{b}^s t^s \inf\frac{\rho(t\tilde{b}R)}{(t\tilde{b}R)^s}\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(\tilde{a}\sigma)\} = s!\tilde{b}^s t^s\rho_s\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(\tilde{a}\sigma)\}.$$

Лема доведена.

Лема 2.2. *Функція Q_2 – мультиплікатор у просторі $S_{b_k}^{b_n}$.*

Доведення. З урахуванням (2.13) правильними є нерівності

$$Q_1(t_k,\sigma) \leq \exp\{-t_k\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\} \leq 1,\ k\in\{1,\ldots,m\},\ \sigma\in\mathbb{R}.$$

Оскільки $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, то

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\sigma) \leq \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k < 1.$$

Тоді, скориставшись поліноміальною формулою, знайдемо, що

$$Q_2(\sigma) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-r}\left(\sum_{k=1}^{m}\mu_k e^{t_k\varphi(\sigma)}\right)^{r} = \sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\times$$

$$\times \sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\dots r_m!}\left(\mu_1 e^{t_1\varphi(\sigma)}\right)^{r_1}\dots\left(\mu_m e^{t_m\varphi(\sigma)}\right)^{r_m} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\dots r_m!}\mu_1^{r_1}\dots\mu_m^{r_m}Q_1(\lambda,\sigma),$$

де $\lambda := t_1r_1 + \ldots + t_mr_m$, $Q_1(\lambda,\sigma) = e^{\lambda\varphi(\sigma)}$. Звідси та з (2.14) випливають нерівності

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \le \tilde{b}^s s!\rho_s\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\dots r_m!}\mu_0^r\lambda^s\times$$

$$\times\exp\{-\lambda\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\} \le \tilde{b}^s s!\rho_s t_m^s\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\mu_0^r r^s\times$$

$$\times\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\dots r_m!},\ s\in\mathbb{N},$$

де $\mu_0 = \max\{\mu_1,\dots\mu_m\}$. Далі скористаємося формулою

$$\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\dots r_m!} = m^r.$$

Тоді

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \le c'\tilde{b}_1^s s!\rho_s\sum_{r=0}^{\infty}\tilde{\mu}^r r^s = \tilde{c}\tilde{b}_1^s s!\rho_s,\ s\in\mathbb{N}, \qquad (2.16)$$

де $\tilde{\mu} = \mu^{-1}\mu_0 m < 1$, $c' = \mu^{-1}$, $\tilde{c} = c'\sum\limits_{r=0}^{\infty}\tilde{\mu}^r r^s$, $b_1 = \tilde{b}t_m$. З останньої нерівності та обмеженості функції Q_2 на $\mathbb{R}$ випливає, що Q_2 – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$. Лема доведена.

Із нерівності (2.13) та леми 2.2 випливає, що функція $Q(t,\sigma)$, як функція σ, є елементом простору $S^{b_n}_{b_k}$ (при кожному $t > 0$). Урахувавши (2.14), (2.16) та формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, знайдемо, що для $t > 1$

$$|D^s_\sigma Q(t,\sigma)| = \left|\sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_\sigma Q_1(t,\sigma) D^{s-l}_\sigma Q_2(\sigma)\right| \leq$$

$$\leq \tilde{c}_1 A^S \sum_{l=0}^{s} C^l_s \tilde{b}^l t^l l! \rho_l b_1^{s-l}(s-l)!\rho_{s-l} e^{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)} \leq$$

$$\leq \tilde{c}_1 b_2^s t^s s! \rho_s \exp\left\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\}, \ \sigma \in \mathbb{R}, \tag{2.17}$$

де $b_2 = 2\max\{\tilde{b}, b_1\}$.

Урахувавши властивості перетворення Фур'є та співвідношення $F^{-1}\left[S^{b_n}_{b_k}\right] = S^{b_n}_{b_k}$, знайдемо, що $G(t,\cdot) = F^{-1}\left[Q(t,\cdot)\right] \in S^{b_n}_{b_k}$ при кожному $t \in (0,+\infty)$. Виділимо в оцінках похідних функції G та її похідних (за змінною x) залежність від параметра t, якщо $t > 2$.

Скориставшись властивістю опуклості функції $\ln\tilde{\gamma}$, прийдемо до нерівностей

$$\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\} = \exp\left\{\frac{-t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\}\cdot\exp\left\{\frac{-t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\}\cdot\exp\left\{\frac{-t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\} =$$

$$= \gamma(a\sigma)\exp\left\{\frac{-t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\}.$$

Тоді

$$\left|\sigma^k D_\sigma^s Q(t,\sigma)\right| \le \tilde{c}_1 b_2^s t^s s! \rho_s \inf_k \frac{b_k}{|a\sigma|^k} |\sigma|^k \exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\} \le$$

$$\le \tilde{c}_1 b_2^s t^s s! \rho_s \left(\frac{1}{a}\right)^k b_k \exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\} =$$

$$= c\tilde{B}^s t^s \tilde{A}^k b_s b_k \exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\}, \qquad (2.18)$$

$$c = \tilde{c}_1,\ \tilde{B} = b_2,\ \tilde{A} = 1/a,\ \{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Далі скористаємось співвідношенням

$$x^k D_x^s F[g](x) = i^{k+s} F[(\sigma^s g(\sigma))^{(k)}] =$$

$$= i^{k+s} \int_{\mathbb{R}} (\sigma^s g(\sigma))^{(k)} e^{ix\sigma} d\sigma,\ \ \{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+,\ \ g \in S_{b_k}^{b_n}.$$

Отже,

$$x^k D_x^s G(t,x) = (2\pi)^{-1} i^{k+s} (-1)^s \int_{\mathbb{R}} (\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)} e^{ix\sigma} d\sigma.$$

Із обмежень, накладених на послідовність $\{\rho_k\}$, випливають нерівності (див. властивість б))

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} \ge c_b^{-1} n^{1-\gamma_1},\ \frac{b_k}{b_{k-1}} \ge c_b^{-1} k^{1-\gamma_1},\ 2\gamma_1 = \theta \le 1.$$

Звідси та з результатів, отриманих в [22], випливає, що подвійна послідовність $m_{ks} = b_k \cdot b_s$ задовольняє нерівність

$$ks \frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} \le \alpha(k+s),\ \ \alpha > 0.$$

Застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, оцінки (2.18) та останню нерівність, знайдемо, що для $t > 2$ справджуються нерівності

$$\left|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}\right| = \left|\sum_{p=0}^{k} C_k^p (\sigma^s)^{(p)} Q^{(k-p)}(t,-\sigma)\right| \le$$

$$\le \left|\sigma^s Q^{(k)}(t,-\sigma)\right| + ks\left|\sigma^{s-1}Q^{(k-1)}(t,-\sigma)\right| +$$

$$+\frac{k(k-1)}{2!}s(s-1)\left|\sigma^{s-2}Q^{(k-2)}(t,-\sigma)\right| + \dots \le$$

$$\le c\tilde{A}^s\tilde{B}^k b_s t^k b_k \exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\}\cdot$$

$$\cdot\Big(1 + \frac{ks}{\tilde{A}\tilde{B}}\frac{m_{s-1,k-1}}{m_{sk}} + \frac{1}{2!}\frac{ks}{\tilde{A}^2\tilde{B}^2}\frac{m_{s-1,k-1}}{m_{sk}}(k-1)(s-1)\times$$

$$\times\frac{m_{s-2,k-2}}{m_{s-1,k-1}} + \dots\Big) \le c\tilde{A}^s\tilde{B}^k t^k b_s b_k \exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\}\cdot$$

$$\cdot\left(1 + \frac{\alpha}{\tilde{A}\tilde{B}}(k+s) + \frac{1}{2!}\frac{\alpha^2}{\tilde{A}^2\tilde{B}^2}(k+s)^2 + \dots\right) \le$$

$$\le c\tilde{A}^s\tilde{B}^k t^k b_s b_k \exp\left\{\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\right\}\cdot\exp\left\{\frac{\alpha}{\tilde{A}\tilde{B}}(k+s)\right\} \le$$

$$\le \tilde{c}A_1^s B_1^k t^k b_s b_k \exp\left\{-\tilde{c}_0 t|\sigma|\right\},\ t \ge 2,\ \tilde{c}_0 > 0,$$

де $A_1 = \tilde{A}\exp\left\{\frac{\alpha}{\tilde{A}\tilde{B}}\right\}$, $B_1 = \tilde{B}\exp\left\{\frac{\alpha}{\tilde{A}\tilde{B}}\right\}$ (тут враховано, що функція $\tilde{\gamma} = \rho$ задовольняє нерівність $\tilde{\gamma} \ge c\exp\{c_0|\sigma|\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$).

Отже,

$$\left|x^k D_x^s G(t,x)\right| \le (2\pi)^{-1}\tilde{c}\tilde{A}_1^s\tilde{B}_1^k t^k b_k b_s \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\tilde{c}_0 t|\sigma|\right\} d\sigma =$$

$$= L\tilde{A}_1^s\tilde{B}_1^k t^{k-1} b_k b_s, \quad \{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+,\ L > 0.$$

Тоді

$$|D_x^s G(t,x)| \le Lt^{-1}\tilde{A}_1^s b_s \inf_k \frac{b_k}{(t^{-1}\tilde{B}_1^{-1}|x|)^k} =$$

$$= Lt^{-1}\tilde{A}_1^s b_s \gamma(d_0 t^{-1}|x|) = Lt^{-1}\tilde{A}_1^s b_s \exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}(d_0 t^{-1}|x|)\right\},$$

де $d_0 = \tilde{B}_1^{-1},\ s \in \mathbb{Z}_+$. Таким чином, правильним є наступне твердження.

Лема 2.3. *$G(t,\cdot) \in S_{b_k}^{b_n}$ при кожному $t \in (0,+\infty)$. Для функції $G(t,x),\ t \ge 2,\ x \in \mathbb{R}$, та її похідних (за змінною x) справджуються нерівності*

$$|D_x^s G(t,x)| \le Lt^{-1}A_1^s b_s \exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}(d_0 t^{-1}|x|)\right\},\ s \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.19}$$

сталі $L, A_1, d_0 > 0$ не залежать від t.

Лема 2.4. *Функція $G(t,\cdot),\ t \in (0,+\infty)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_{b_k}^{b_n}$, диференційовна по t.*

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S випливає, що для доведення леми досить встановити, що функція $F[G(t,\cdot)] = Q(t,\cdot)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $F[S_{b_k}^{b_n}] = S_{b_k}^{b_n}$, диференційовна по t, тобто потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}\left[Q(t+\Delta t,\sigma) - Q(t,\sigma)\right] \to \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma),\ \ \Delta t \to 0,$$

виконується в тому розумінні, що

1) $D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} D_\sigma^s(\varphi(\sigma)Q(t,\sigma)),\ s \in \mathbb{Z}_+$, рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$;

2) $|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \bar{c}\bar{B}^s b_s e^{-\ln\tilde{\gamma}_1(a\sigma)},\ \ s \in \mathbb{Z}_+,\ b_s = s!\rho_s$, де сталі $\bar{c}, \bar{B}, a > 0$ не залежать від Δt, для досить малих значень Δt.

Нехай $t > 1$ – фіксоване. Функція $Q(t,\sigma)$, $t > 1$,$\sigma \in \mathbb{R}$, диференційовна по t у звичайному розумінні, тому, внаслідок теореми Лагранжа про скінченні прирости,

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = \varphi(\sigma) Q(t+\theta\Delta t, \sigma), \ \ 0 < \theta < 1, \ t + \theta \Delta t \le T.$$

Отже,

$$D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) = \sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_\sigma \varphi(\sigma) D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t, \sigma)$$

і

$$D^s_\sigma \left(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma) \right) = \sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_s \varphi(\sigma) \times$$
$$\times \left[D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t, \sigma) - D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma) \right].$$

Оскільки

$$D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t, \sigma) - D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma) = D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t, \sigma)\theta\Delta t,$$
$$0 < \theta_1 < 1,$$

то звідси та з оцінок (2.17) випливає, що

$$D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t, \sigma)\theta\Delta t \to 0, \ \Delta t \to 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Тоді і $D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) \to D^s_\sigma(\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma))$ при $\Delta t \to 0$ рівномірно на відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Оскільки φ – мультиплікатор у просторі $S^{b_n}_{b_k}$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists c_\varepsilon > 0 \, \forall z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : |\varphi(z)| \le c_\varepsilon e^{\ln \tilde{\gamma}(\varepsilon\sigma) + \ln \rho(\varepsilon\tau)}. \tag{2.20}$$

Внаслідок інтегральної формули Коші маємо, що

$$\varphi^{(n)}(\sigma) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{\varphi(z)}{(z-\sigma)^{n+1}} dz, \ n \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $\sigma \in \mathbb{R}$. Тоді, врахувавши (2.20), прийдемо до нерівностей

$$|\varphi^{(n)}(\sigma)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{z\in\Gamma_R} |\varphi(z)| \leq c_\varepsilon \frac{n!}{R^n} e^{\ln \tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma+R))+\ln \rho(\varepsilon R)} \leq$$

$$\leq c_\varepsilon n! \inf_R \frac{\rho(\varepsilon R)}{R^n} e^{\ln \tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma+R))} = c_\varepsilon \varepsilon^n n! \rho_n e^{\ln \tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma+R))}, \ \sigma \geq 0.$$

При достатньо великих значеннях $\sigma \geq 0$ справджується нерівність $\varepsilon(\sigma + R) \leq (\varepsilon + R)\sigma$. Оскільки функція $\ln \tilde{\gamma}$ монотонно зростає на проміжку $[0, +\infty)$, то при цих значеннях σ маємо, що

$$\ln \tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma + R)) \leq \ln \tilde{\gamma}((\varepsilon + R)\sigma).$$

Тоді для всіх $\sigma \geq 0$

$$\ln \tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma + R)) \leq \ln \tilde{\gamma}((\varepsilon + R)\sigma) + c_R, \ c_R > 0.$$

Отже, $\exp\{\ln \tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma+R))\} \leq \tilde{c}_R \exp\{\ln \tilde{\gamma}((\varepsilon+R)\sigma)\}$ для $\sigma \geq 0$. Надалі, при заданому $\varepsilon > 0$ вважатимемо, що $R = \varepsilon$. Тоді

$$|\varphi^{(n)}(\sigma)| \leq \tilde{c}_\varepsilon \varepsilon^n n! \rho_n \exp\{\ln \tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma)\}, \ n \in \mathbb{Z}_+. \qquad (2.21)$$

Урахувавши (2.21) та оцінки, які задовольняють похідні функції $Q(t, \sigma)$, знайдемо, що

$$|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \tilde{c}_1 \tilde{c}_\varepsilon \sum_{l=0}^{s} C_s^l \varepsilon^l l! \rho_l b_2^{s-l} t^{s-l} (s-l)! \rho_{s-l} \times$$

$$\times \exp\{\ln \tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma) - (t + \theta\Delta t) \ln \tilde{\gamma}(a\sigma)\} \leq$$

$$\leq \bar{c} \bar{B}^s s! \rho_s \exp\{\ln \tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma) - t \ln \tilde{\gamma}(a\sigma)\} \leq$$

$$\leq \bar{c} \bar{B}^s s! \rho_s \exp\{\ln \tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma) - \ln \tilde{\gamma}(a\sigma)\},$$

де $\bar{B} = 2\max\{\varepsilon, b_2 t\}$. Візьмемо $\varepsilon = \bar{a}/4$. Із нерівності опуклості для функції $\ln \tilde{\gamma}$ випливає, що

$$\ln \tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma) - \ln \tilde{\gamma}(a\sigma) \leq -\ln \tilde{\gamma}((a - 2\varepsilon)\sigma) \equiv -\ln \tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma),$$

$$\bar{a} = a - 2\varepsilon = a/2 > 0.$$

Тоді

$$|D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \bar{c}\bar{B}^s s! \rho_s \exp\{-\ln\tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma)\}, \ \sigma \geq 0,$$

причому сталі $\bar{c}, \bar{B}, \bar{a} > 0$ не залежать від Δt (для достатньо малих значень Δt). Випадок $\sigma < 0$ розглядається аналогічно.

Якщо $t \in (0,1]$ – фіксоване, то доведення твердження у цьому випадку здійснюється за схемою доведення у випадку $t > 1$; при цьому в оцінках (2.17) слід вважати $t = 1$. Таким чином, умова 2) також виконується. Лема доведена.

Наслідок 2.1. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f * G(t,x)\right) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}, \ \ \forall f \in \left(S^{b_n}_{b_k}\right)', \ t > 0.$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основою маємо, що

$$f * G(t,x) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle, \ \ \check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f * G(t,\cdot)\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[f * G(t+\Delta t,\cdot) - f * G(t,\cdot)\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}\left[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)\right]\rangle.$$

Внаслідок леми 2.4 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}\left[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\right] \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \frac{\partial}{\partial t} T_{-x}\check{G}(t,\cdot)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $S^{b_n}_{b_k}$, тому, з урахуванням неперервності функціонала f, маємо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f * G(t,\cdot)\right) = \langle f_\xi, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)\right]\rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t} T_{-x} \check{G}(t,\xi) \rangle = \langle f_\xi, T_{-x} \frac{\partial}{\partial t} \check{G}(t,\xi) \rangle = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t},$$

що й потрібно було довести.

Лема 2.5. *У просторі* $(S_{b_k}^{b_n})'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t \to +0} G(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t \to t_l} G(t,\cdot) = \delta. \qquad (2.22)$$

(тут δ *– дельта-функція Дірака).*

Доведення. Скориставшись властивістю неперервності перетворення Фур'є та функції $G(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $S_{b_k}^{b_n}$, співвідношення (2.22) замінимо граничним співвідношенням

$$\mu \lim_{t \to +0} F[G(t,\cdot)] - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t \to t_l} F[G(t,\cdot)] = F[\delta] \qquad (2.23)$$

у просторі $(S_{b_k}^{b_n})'$. Урахувавши зображення функції G, (2.23) подамо у вигляді

$$\mu \lim_{t \to +0} Q(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{n} \mu_l \lim_{t \to t_l} Q(t,\cdot) = 1. \qquad (2.24)$$

Для доведення (2.24) візьмемо довільну функцію $\psi \in S_{b_k}^{b_n}$ і, скориставшись теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега та розуміючи $Q(t,\cdot)$ як регулярну узагальнену функцію з простору $(S_{b_k}^{b_n})'$, знайдемо, що

$$\mu \lim_{t \to +0} \langle Q(t,\cdot), \psi \rangle - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t \to t_l} \langle Q(t,\cdot), \psi \rangle =$$

$$= \mu \lim_{t \to +0} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\psi(\sigma) d\sigma - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t \to t_l} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\psi(\sigma) d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big[\frac{\mu}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, \sigma)} - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \frac{Q_1(t_l, \sigma)}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, \sigma)} \Big] \varphi(\sigma) d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mu - \sum\limits_{l=1}^{m} \mu_l Q_1(t_l, \sigma)}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, \sigma)} \psi(\sigma) d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(\sigma) d\sigma = \langle 1, \psi \rangle.$$

Звідси випливає, що співвідношення (2.24) виконується у просторі $(S_{b_k}^{b_n})'$, а отже, правильним є співвідношення (2.22). Лема доведена.

Наслідок 2.2. *Нехай*

$$\omega(t, x) = f * G(t, x), \; f \in (S_{b_k}^{b_n}, \, _*)', \; (t, x) \in \Omega.$$

Тоді в просторі $(S_{b_k}^{b_n})'$ справджується граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \to +0} \omega(t, \cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \omega(t, \cdot) = f. \tag{2.25}$$

Доведення. Оскільки

$$\omega(t, x) = f * G(t, x) = \langle f_\xi, T_{-x} \check{G}(t, \xi) \rangle, \quad f \in (S_{b_k}^{b_n}, \, _*)',$$

то з властивості неперервності $G(t, \cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $S_{b_k}^{b_n}$, випливає неперервність $\omega(t, \cdot)$ як абстрактної функції параметра t із значеннями в цьому ж просторі. Тоді, врахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є та формулу $F[f * G] = F[f]F[G] = F[f]Q$, яка правильна для довільної узагальненої функції f з класу $(S_{b_k}^{b_n}, \, _*)'$, від (2.25) перейдемо до співвідношення

$$\mu \lim_{t \to +0} F[\omega(t, \cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} F[\omega(t, \cdot)] = F[f]$$

або

$$\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} Q(t,\cdot) = 1,$$

яке, за доведеним раніше (див. (2.24)), справджується в цьому просторі. Цим доведено, що співвідношення (2.25) виконується в просторі $(S_{b_k}^{b_n})'$. Твердження доведено.

Функція G є розв'язком рівняння (2.6). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} F^{-1}[Q(t,\sigma)] = F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right].$$

З іншого боку,

$$A_\varphi G(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}\left[\varphi(\sigma) F_{x\to\sigma}[G(t,x)]\right] = F^{-1}\left[\varphi(\sigma) Q(t,\sigma)\right] =$$

$$= -F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right].$$

Звідси вже випливає, що функція G задовольняє рівняння (2.7).

Надалі функцію G називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової (m – точкової) задачі для рівняння (2.7).

З наслідку 2. випливає, що для рівняння (2.6) m – точкову за часом задачу можна ставити так: знайти розв'язок рівняння (2.6), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f, \quad f \in (S_{b_k}^{b_n},\ _*)', \quad (2.26)$$

де граничне співвідношення (2.26) розглядається в просторі $(S_{b_k}^{b_n})'$ (обмеження на параметри μ, μ_1, $\ldots$, μ_m, t_1, $\ldots$, t_m такі ж, як у випадку задачі (2.7), (2.8)).

Теорема 2.1. *Нелокальна багатоточкова за часом задача* (2.6), (2.26) *коректно розв'язна. Розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x), \quad (t,x) \in \Omega,$$

де G – фундаментальний розв'язок багатоточкової задачі для рівняння (2.6).

Доведення. Передусім переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (2.6). Справді, (див. наслідок 1.),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,x)) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t},$$

$$A_\varphi u(t,x) = F^{-1}[\varphi(\sigma)F[f * G(t,x)](\sigma)](x).$$

Оскільки, f – згортувач у просторі $S_{b_k}^{b_n}$, то

$$F[f * G(t,x)](\sigma) = F[f](\sigma)F[G(t,x)](\sigma) = F[f](\sigma)Q(t,\sigma).$$

Отже,

$$A_\varphi u(t,x) = F^{-1}[\varphi(\sigma)Q(t,\sigma)F[f](\sigma)](x) =$$

$$= F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)F[f](\sigma)\right](x) =$$

$$= F^{-1}\left[F\left[\frac{\partial}{\partial t}G\right](t,\sigma)\cdot F[f](\sigma)\right](x) =$$

$$= F^{-1}\left[F\left[f * \frac{\partial G}{\partial t}\right]\right](x) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (2.6). З наслідку 2. випливає, що u задовольняє граничну умову (2.26) у вказаному сенсі.

Зазначимо також, що u неперервно залежить від функції $f \in (S_{b_k}^{b_n},\ _*)'$, оскільки операція згортки володіє властивістю неперервності.

Залишається переконатися в тому, що задача (2.6), (2.26) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A_\varphi^* v = 0, \quad (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R} \equiv \Omega', \quad 0 \le t < t_0 < \infty, \tag{2.27}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi \in (S_{b_k}^{b_n},\ _*)', \tag{2.28}$$

де $A_\varphi^* g = F[\varphi F^{-1}[g]]$, $\forall g \in S_{b_k}^{b_n}$, A_φ^* – звуження спряженого оператора до оператора A_φ на простір $S_{b_k}^{b_n} \subset (S_{b_k}^{b_n})'$. Умову (2.28) розуміємо в слабкому сенсі. Задача Коші (2.27), (2.28) є розв'язною, при цьому $v(t,\cdot) \in S_{b_k}^{b_n}$ при кожному $t \in [0, t_0)$.

Нехай $Q_{t_0}^t : (S_{b_k}^{b_n},\ _*)' \to S_{b_k}^{b_n}$ – оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in (S_{b_k}^{b_n},\ _*)'$ розв'язок задачі (2.27), (2.28). Оператор $Q_{t_0}^t$ є лінійним і неперервним, він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 < \infty$ і володіє властивостями:

$$\forall \psi \in (S_{b_k}^{b_n},\ _*)' : \frac{dQ_{t_0}^t \psi}{dt} + A_\varphi^* Q_{t_0}^t \psi = 0, \ \lim_{t \to t_0} Q_{t_0}^t \psi = \psi$$

(границя розглядається в просторі $(S_{b_k}^{b_n})'$).

Розглянемо розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задачі (2.6), (2.26), який розумітимемо як регулярний функціонал з простору $(S_{b_k}^{b_n},\ _*)' \supset S_{b_k}^{b_n}$. Доведемо, що задача (2.6), (2.26) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(S_{b_k}^{b_n},\ _*)'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (2.6) при нульовій граничній умові може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$ (при кожному $t \in (0,\infty)$). Застосуємо функціонал u до функції $Q_{t_0}^t \psi \in S_{b_k}^{b_n}$, де ψ – довільно фіксований елемент з простору $S_{b_k}^{b_n} \subset (S_{b_k}^{b_n},\ _*)'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (2.6), (2.26), знайдемо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi\rangle = \langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q_{t_0}^t \psi\rangle + \langle u, \frac{\partial Q_{t_0}^t \psi}{\partial t}\rangle =$$

$$= \langle A_\varphi u, Q_{t_0}^t \psi\rangle - \langle u, A_\varphi^* Q_{t_0}^t \psi\rangle = \langle A_\varphi u, Q_{t_0}^t \psi\rangle -$$

$$-\langle A_\varphi u, Q_{t_0}^t \psi\rangle = 0, \quad t \in [0, t_0).$$

Звідси випливає, що $\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi\rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення

$$\lim_{t\to t_0} \langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi\rangle = \langle u(t,\cdot), \psi\rangle = const \equiv c$$

у довільній точці $t_0 \in (0,\infty)$. Отже, якщо в (2.26) $f = 0$, то

$$\mu \lim_{t\to +0} \langle u(t,\cdot), \psi\rangle - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \langle u(t,\cdot), \psi\rangle = c\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\right) = 0,$$

тобто $c = 0$. Таким чином, $\langle u(t_0,\cdot), \psi\rangle = 0$ для довільного $\psi \in S_{b_k}^{b_n}$, тобто $u(t_0, x)$ – нульовий функціонал з простору $(S_{b_k}^{b_n}, \ {}_*)'$. Оскільки $t_0 \in (0,+\infty)$ і t_0 вибране довільним чином, то $u(t,x) \equiv 0$ для всіх $t \in (0,\infty)$. Теорема доведена.

2.3. Стабілізація розв'язків нелокальної задачі у просторах типу S'

Початок досліджень зі стабілізації розв'язків задачі Коші для рівняння теплопровідності було покладено у 50-х роках М. Кжижанським. У праці [292] він побудував приклад обмеженої початкової функції, для якої розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності не має границі при $t \to +\infty$. Ідея конструкції прикладу Кжижанського використовувалася іншими авторами при побудові прикладів, які характеризують поведінку розв'язку в залежності від властивостей початкової функції. У більшості праць, присвячених стабілізації розв'язків задачі Коші для тих чи інших рівнянь параболічного типу припускається, що початкова функція є звичайною, тобто досліджуються властивості розв'язків класичної задачі Коші. При цьому результати умовно можна розділити на дві групи в залежності від того, обмеженою чи необмеженою є початкова функція.Огляд праць, які стосуються цього питання, наведено в [27].

У цьому підрозділі вивчається питання про слабку стабілізацію до нуля розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі, тобто досліджується стабілізація до нуля розв'язку у тих просторах узагальнених функцій типу S', до яких належить функція f в умові (2.26).

Зазначимо, що слабка стабілізація розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності досліджувалася в працях [293, 294], основний результат сформулювано в термінах узагальненого граничного кульового середнього $M_\psi(f)$, рівного l, від узагальненої початкової функції $f \in (S_{1/2}(\mathbb{R}^n))'$, вперше введеного у праці [293]:

$$M_\psi(f) = \lim_{R\to+\infty} M_{R,\psi}(f) \equiv \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{mesK_R(x_0)}\times$$

$$\times \int\limits_{K_R(x_0)} (f*\psi)(x)dx = l\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx,\ \psi \in S_{1/2}(\mathbb{R}^n),$$

де $K_R(x_0)$ – куля радіуса R з центром у точці x_0, $mesK_R(x_0)$ – об'єм кулі $K_R(x_0)$; $M_\psi(f)$ не залежить від вибору центра кулі, тобто точки x_0, а якщо $l = 0$, то $M_\psi(f)$ не залежить і від вибору основної функції ψ [293].

Теорема 2.2. *Розв'язок* $u(t,x)$ *нелокальної багатоточкової за часом задачі* (2.6), (2.26) *збігається до нуля при* $t\to+\infty$ *у просторі* $(S_{b_k}^{b_n})'$.

Доведення. Нагадаємо, що розв'язок задачі (2.6), (2.26) визначається формулою

$$u(t,x) = f*G(t,x) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = \langle f_\xi, G(t,x-\xi)\rangle,$$

де G – фундаментальний розв'язок зазначеної задачі, $\check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi)$, T_{-x} – оператор зсуву аргумента в просторі $S_{b_k}^{b_n}$.

Нехай $\psi \in S_{b_k}^{b_n}$. Покладемо

$$\psi_t(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,x-\xi)\psi(x)dx,\ \ \psi_{t,R}(\xi) =$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} G(t, x-\xi)\psi(x)dx, quadR > 0.$$

У цих позначеннях перевіримо, що: а) при кожному $t \geq 2$ і довільному $R > 0$ функція $\psi_{t,R}(\xi)$ належить до простору $S_{b_k}^{b_n}$, $\psi_{t,R}(\xi) \to \psi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ у просторі $S_{b_k}^{b_n}$; б) $\psi_t(\xi) \in S_{b_k}^{b_n}$ при кожному $t \geq 2$. Звідси випливатиме, що

$$\langle u(t,x), \psi(x)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \langle f_\xi, G(t, x-\xi)\rangle \psi(x)dx =$$

$$= \langle f_\xi, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,x)\psi(x+\xi)dx\rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\psi(-(y-\xi))dy\rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\check{\varphi}(y-\xi)dy\rangle, \quad \check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$$

(тут $u(t,\cdot)$ трактується як регулярна узагальнена функція з простору $(S_{b_k}^{b_n})'$ при кожному $t > 0$).

Отже, встановимо а). При фіксованих $\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+$ маємо:

$$\left|\xi^k D_\xi^n \psi_{t,R}(\xi)\right| \leq \int\limits_{-R}^{+R} \left|\xi^k \psi(x) D_\xi^n G(t, x-\xi)\right| dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\xi^k \psi(\xi+\eta) D_\eta^n G(t,\eta)\right| d\eta.$$

Оскільки $\psi \in S_{b_k}^{b_n}$, то при деяких $c_1,\ L_1,\ M_1 > 0$ справджуються нерівності

$$\left|\xi^k D_\xi^n \psi(\xi)\right| \leq c_1 L_1^k M_1^n b_k b_n,\ \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Звідси, при кожному $\eta \in \mathbb{R}$, дістаємо оцінки:

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left|\xi^k \psi(\xi+\eta)\right| = \sup_{y\in\mathbb{R}} \left|(y-\eta)^k \psi(y)\right| =$$

$$= \sup_{y\in\mathbb{R}} \left|\sum_{l=0}^{k} C_k^l y^l (-\eta)^{k-l} \psi(y)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{k} C_k^l |\eta|^{k-l} \sup_{y\in\mathbb{R}} |y^l \psi(y)| \leq c_1 b_0 \sum_{l=0}^{k} C_k^l L_1^l b_l |\eta|^{k-l}.$$

Далі скористаємося оцінками (2.19). Тоді

$$\left|\xi^k D_\xi^n \psi_{t,R}(\xi)\right| \leq c_1 b_0 \sum_{l=0}^{k} C_k^l L_1^l b_l \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\eta^{k-l} D_\eta^n G(t,\eta)| d\eta \leq$$

$$\leq c_1 b_0 L t^{-1} A_1^n b_n \sum_{l=0}^{k} C_k^l L_1^l b_l \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\left\{-\ln\tilde{\gamma}(d_0 t^{-1}|\eta|)\right\} d\eta.$$

Здійснивши заміну змінної інтегрування за формулою $d_0 t^{-1}\eta = z$, прийдемо до співвідношення

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\left\{-ln\tilde{\gamma}(d_0 t^{-1}|\eta|)\right\} d\eta =$$

$$= (d_0^{-1} t)^{k-l+1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |z|^{k-l} \exp\left\{-ln\tilde{\gamma}(z)\right\} dz.$$

Скориставшись властивістю опуклості функції $ln\tilde{\gamma}$, знайдемо, що

$$\exp\left\{-ln\tilde{\gamma}(z)\right\} \le \exp\left\{-ln\tilde{\gamma}\left(\frac{z}{2}\right)\right\} \cdot \exp\left\{-ln\tilde{\gamma}\left(\frac{z}{2}\right)\right\} =$$

$$= \gamma\left(\frac{z}{2}\right)\exp\left\{-ln\tilde{\gamma}\left(\frac{z}{2}\right)\right\} \le \tilde{c}_0\gamma(\frac{z}{2})\exp\left\{-\tilde{c}|z|\right\}, \ \tilde{c}_0, \tilde{c} > 0.$$

Тоді

$$I_{k-l} := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\left\{-ln\tilde{\gamma}(d_0 t^{-1}|\eta|)\right\} d\eta \le$$

$$\le \tilde{c}_0 (d_0^{-1}t)^{k-l+1} \cdot \sup_z \left(|z|^{k-l}\gamma\left(\frac{z}{2}\right)\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\tilde{c}|z|\} dz.$$

Оскільки

$$|z|^{k-l}\gamma\left(\frac{z}{2}\right) = |z|^{k-l}\inf\frac{b_{k-l}}{|z/2|^{k-l}} \le 2^k b_{k-l}, \ |z| \ge 1,$$

$$l \in \{0, 1, ..., k\},$$

то правильним є нерівності

$$I_{k-l} \le \tilde{c}_0\alpha t^{k+1}(2\tilde{d}_0)^k b_{k-l}, \ t \ge 2, \ l \in \{0, 1, ..., k\},$$

де $d_0 = \max\{d_0^{-1}, 1\}$, $\alpha = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\tilde{c}|z|\}dz$. Урахувавши властивість д) послідовності $\{b_k\}$, знайдемо, що

$$\left|\xi^k D_\xi^n \psi_{t,R}(\xi)\right| \le \tilde{c}_0 c_1 \alpha b_0 L (2\tilde{d}_0 t)^k A_1^n b_n \sum_{l=0}^{k} C_k^l L_1^l b_l b_{k-l} \le$$

$$\le N\tilde{L}^n A_1^n b_n (2\tilde{d}_0 t)^k b_k \sum_{l=0}^{k} C_k^l L_1^l = N A_2^n B_2^k b_n b_k, \qquad (2.29)$$

де $N = c_1\tilde{c}_0\alpha b_0 LA,\ A_2 = \tilde{L}A_1,\ B_2 = 4d_0 t \max\{1, L_1\}$, звідки й випливає, що $\psi_{t,R}(\xi) \in S_{b_k}^{b_n}$ при кожному $t \geq 2$ і кожному $R > 0$. Далі безпосередньо переконуємося в тому, що $\psi_{t,R}(\xi) \to \psi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ рівномірно по ξ разом з усіма своїми похідними на кожному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Крім того, сукупність функцій $\xi^k D_\xi^n \psi_{t,R}(\xi), \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$, рівномірно обмежена в просторі $S_{b_k}^{b_n}$ (ця властивість випливає з оцінок (2.29), у яких сталі $N,\ A_2,\ B_2 > 0$ не залежать від R). Це і означає виконання умови а).

З умови а) випливає умова б), оскільки в досконалому просторі кожна обмежена множина є компактною.

Використовуючи властивості а), б), прийдемо до співвідношення

$$\langle u(t, \cdot), \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, -y)(f * \check{\psi})(y)dy,\ \psi \in S_{b_k}^{b_n}.$$

Оскільки функціонал f – згортувач у просторі $S_{b_k}^{b_n}$, то $f * \check{\psi}_1 \in S_{b_k}^{b_n}$. Звідси, зокрема, випливає, що

$$|(f * \check{\psi})(y)| \leq c \exp\left\{-\ln \tilde{\gamma}(ay)\right\},\ y \in \mathbb{R},$$

з деякими сталими $c,\ a > 0$. Урахувавши останню нерівність та оцінки (2.19), знайдемо, що

$$|\langle u(t, \cdot), \psi \rangle| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t, -y)||(f * \check{\psi})(y)|dy \leq$$

$$\leq Lb_0 ct^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-ln\tilde{\gamma}(d_0 t^{-1} y)\right\} \exp\left\{-ln\tilde{\gamma}(ay)\right\} dy \leq$$

$$\leq \tilde{b}t^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-ln\tilde{\gamma}(ay)\right\} dy = b' t^{-1}.$$

Перейшовши тут до границі при $t \to +\infty$, дістанемо, що $\langle u(t,\cdot), \psi \rangle \to 0$ при $t \to +\infty$ для довільної функції $\psi \in S_{b_k}^{b_n}$, що й потрібно було довести.

Далі будемо розглядати узагальнені функції, задані на просторі основних функцій, який є неквазіаналітичним. Такий простір містить в собі нескінченно диференційовні фінітні функції. Зокрема, для довільних неперетинних проміжків $[a_1, b_1]$ та $[a_2, b_2]$ знайдеться основна функція, рівна одиниці на $[a_1, b_1]$ та нулеві на $[a_2, b_2]$. Розглянемо послідовність $\{\tilde{b}_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, яка задовольняє умову: $b_n \leq \tilde{b}_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, де $\{b_n = n!\rho_n\}$ – послідовність, яка розглядалася раніше. При цьому мають місце неперервні вкладення: $S_{b_k}^{b_n} \subset S_{b_k}^{\tilde{b}_n} \subset (S_{b_k}^{\tilde{b}_n})' \subset (S_{b_k}^{b_n})'$. Згідно з теоремою Карлемана-Островського (див., наприклад, [51]), клас $S_{b_k}^{\tilde{b}_n}$ є неквазіаналітичним тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda < +\infty, \ T(\lambda) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{\lambda^n}{\tilde{b}_n}. \tag{2.30}$$

Отже, надалі вважатимемо, що послідовність $\{\tilde{b}_n\}$ така, що відповідна функція $T(\lambda)$ задовольняє умову (2.30).

Наприклад, якщо $\{\tilde{b}_n\} = n^{n\beta_1}$ $(\beta_1 > \beta)$, то $T(\lambda) \sim \exp\{\lambda^{1/\beta_1}\}$ і інтеграл (2.30) збігається при $\beta_1 > 1$. Отже, клас $S_{k^{k\beta}}^{n^{n\beta_1}}$, $0 < \beta < 1$, неквазіаналітичний, якщо $\beta_1 > 1$.

Якщо узагальнена функція f в умові (2.26) є фінітною (тобто носій f (*supp* f) – обмежена множина в $\mathbb{R}$), то можна говорити про рівномірну стабілізацію до нуля розв'язку задачі (2.6), (2.26) при $t \to +\infty$. Зазначимо також, що кожна фінітна узагальнена функція є згортувачем у просторі $S_{b_k}^{\tilde{b}_n}$. Ця властивість випливає із загального результату, який відноситься до теорії досконалих просторів (див. [22]): якщо Φ – досконалий простір із диференційовною операцією зсуву, то кожний фінітний функціонал є згортувачем у просторі Φ. Фінітні узагальнені функції утворюють досить широкий клас; зокрема, кожна обмежена замкнена множина $F \subset \mathbb{R}$ є носієм деякої узагальненої функції.

Теорема 2.3. *Нехай* $u(t,x)$ *– розв'язок задачі* (2.6), (2.26) *з граничною функцією* f *в умові* (2.26), *яка є елементом простору* $(S_{b_k}^{\tilde{b}_n})' \subset (S_{b_k}^{b_n})'$ *і* $supp\ f$ *– обмежена множина в* $\mathbb{R}$. *Тоді* $u(t,x) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *рівномірно на* $\mathbb{R}$.

Доведення. Нехай $supp\ f \subset [a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}$. Розглянемо функцію $\psi \in S_{b_k}^{\tilde{b}_n}$ таку, що $\psi(x) = 1$ для $x \in [a_1, b_1]$ і $supp\ \psi \subset [a_2, b_2]$. Така функція існує, оскільки простір $S_{b_k}^{\tilde{b}_n}$ містить фінітні функції. Функції $\psi(\xi)G(t, x-\xi)$, $(1 - \psi(\xi))G(t,\ x-\xi)$, як функції ξ, є елементами простору $S_{b_k}^{\tilde{b}_n}$ (при кожному $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}$), тому

$$u(t,x) = \langle f_\xi, \psi(\xi)G(t, x-\xi)\rangle + \langle f_\xi, \gamma(\xi)G(t, x-\xi)\rangle,$$

де $\gamma(\xi) = 1 - \varphi(\xi)$. Другий доданок у цій рівності дорівнює нулеві, оскільки $supp\,(\gamma(\xi)G(t, x-\xi)) \cap supp f = \varnothing$. Тому

$$u(t,x) = t^{-1}\langle f_\xi, t\psi(\xi)G(t, x-\xi)\rangle.$$

Отже, для доведення сформульованого твердження досить показати, що сукупність функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = t\psi(\xi)G(t, x-\xi)$ є обмеженою в просторі $S_{b_k}^{\tilde{b}_n}$ при великих значеннях t та $x \in \mathbb{R}$, тобто

$$|D_\xi^n \Phi_{t,x}(\xi)| \le cB^n \tilde{b}_n \exp\{-\ln \tilde{\gamma}(a\xi)\},\ n \in \mathbb{Z}_+, \qquad (2.31)$$

де сталі $c, B, a > 0$ не залежить від t, x і ξ, які змінюються вказаним способом. Оцінки (2.31) достатньо встановити лише для $\xi \in [a_2, b_2]$, бо $\Phi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [a_2, b_2]$.

Оскільки $\psi \in S_{b_k}^{\tilde{b}_n}$, то

$$|D_\xi^n \psi(\xi)| \le c_1 B_1^n \tilde{b}_n \exp\{-\ln \tilde{\gamma}(a_1\xi)\},\ \xi \in \mathbb{R},$$

з деякими сталими $c_1, B_1, a_1 > 0$. Звідси та з оцінок (2.19) (при $t > 1$) випливають нерівності

$$|D_\xi^n \Phi_{t,x}(\xi)| = t \left| \sum_{l=0}^{n} C_n^l D_\xi^l \psi(\xi) D_\xi^{n-l} G(t, x-\xi) \right| \leq c_1 L \times$$

$$\times \exp\left\{ -\ln\tilde{\gamma}(d_0 t^{-1}|x-\xi|) - \ln\tilde{\gamma}(a_1\xi) \right\} \sum_{l=0}^{n} C_n^l B_1^l \tilde{b}_l A_1^{n-l} b_{n-l}.$$

Врахувавши нерівності

$$\exp\left\{ -d_0 (t^{-\alpha}|x-\xi|)^{1/(1-\alpha)} \right\} \leq 1,\ t \geq 2,\ x \in \mathbb{R},\ \xi \in [a_2, b_2],$$

$b_{n-l} \leq \tilde{b}_{n-l}$, $\tilde{b}_l \cdot \tilde{b}_{n-l} \leq A L^n b_n$, $A,\ \tilde{L} > 0$, знайдемо, що

$$|D_\xi^n \Phi_{t,x}(\xi)| \leq \tilde{c} \tilde{B}^n \tilde{b}_n \exp\left\{ -\ln\tilde{\gamma}(a_1\xi) \right\},$$

де $\tilde{c} = c_1 L A$, $\tilde{B} = 2\tilde{L}\max\{B_1, A_1\}$ і всі сталі не залежать від t, x, ξ, які змінюються вказаним чином. Теорема доведена.

Як приклад, розглянемо нелокальну багатоточкову за часом задачу для рівняння (2.6) з оператором A_φ, побудованим за функцією $\varphi(\sigma) = -\sigma^2$. У цьому випадку, як вже зазначалося раніше, $A_\varphi = d^2/dx^2$, а рівняння (2.6) – рівняння теплопровідності. Оскільки $|e^{-z^2}| = |e^{-(\sigma+iy)^2}| = e^{-\sigma^2+y^2}$, то в нерівності (2.12) для функції $e^{\varphi(z)} = e^{-z^2}$ стала $c_0 = 1$, тобто, умова $c_0 \leq 1$ виконується. Внаслідок теореми 1. нелокальна m – точкова за часом задача у півпросторі $t > 0$ для рівняння теплопровідності коректно розв'язна, якщо $f \in (S_{1/2,*}^{1/2})'$. Скориставшись зображенням функції $Q_2(\sigma)$ у випадку рівняння теплопровідності знайдемо, що

$$G(t,x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-t\sigma^2} \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k e^{-t_k \sigma^2} \right)^{-1} e^{i\sigma x} d\sigma =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-t\sigma^2} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\dots\mu_m^{r_m}}{r_1!\dots r_m!} \times$$

$$\times e^{-(t_1r_1+\dots+t_mr_m)\sigma^2} e^{i\sigma x} d\sigma =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\dots\mu_m^{r_m}}{r_1!\dots r_m!} \tilde{G}(t_1r_1+\dots+t_mr_m+t, x),$$

$\tilde{G}(\lambda, x)$, $\lambda = t_1r_1 + \dots + t_mr_m + t$, – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності, тобто

$$\tilde{G}(t, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\lambda}\right\}.$$

Зокрема, якщо $f = \delta \in (S_{1/2,*}^{1/2})'$, то

$$u(t, x) = \delta * G(t, x) = G(t, x).$$

Оскільки $supp\, \delta = \{0\}$, то, внаслідок теореми 2.3, $u(t, x) \to 0$ при $t \to +\infty$ рівномірно на $\mathbb{R}$. Якщо $m = 1$ (випадок двоточкової задачі), $f = \delta \in (S_{1/2,*}^{1/2})'$ то

$$u(t, x) = \frac{1}{2\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^r \frac{1}{\sqrt{\pi(t + rt_1)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4(t + rt_1)}\right\},$$

$$\mu > \mu_1.$$

2.4. Еволюційні рівняння в просторах $S_{1-\alpha}^{\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$

У цьому підрозділі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційного рівняння з оператором диференціювання нескінченного порядку, який діє в просторі $S_{1-\alpha}^{\alpha}$, де $\alpha \in (0, 1)$ – фіксований параметр. Це пов'язано з тим, що фундаментальний розв'язок такого рівняння є елементом простору $F[S_{1-\alpha}^{\alpha}] = S_{\alpha}^{1-\alpha}$. Зазначимо, що результати, наведені в п. 2.2 можна застосувати у випадку, коли $\alpha = 1/2$, тобто у випадку простору

$S_{1/2}^{1/2} = S_{k^{k/2}}^{n^{n/2}}$. Інші випадки, коли $\alpha \in (0,1)$, $\alpha \neq 1/2$, потрібно досліджувати окремо, за схемою, використаною в п. 2.2.

Отже, розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{dt} = A_\varphi u(t,x), \ \ (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \qquad (2.32)$$

де A_φ – псевдодиференціальний оператор у просторі $S_{1-\alpha}^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, побудований за функцією φ, яка є мультиплікатором у просторі $S_{\alpha}^{1-\alpha}$ і такою, що $e^{\varphi} \in S_{\alpha}^{1-\alpha}$, тобто $A_\varphi \psi = F^{-1}[\varphi(\sigma)F[\psi]]$, $\forall \psi \in S_{1-\alpha}^{\alpha}$. Із властивостей перетворення Фур'є у просторах типу S та властивостей функції φ випливає, що A_φ – лінійний неперервний оператор у просторі $S_{1-\alpha}^{\alpha}$, який також можна розуміти як диференціальний оператор нескінченного порядку вигляду

$$A_\varphi \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left[(iD_x)^k \psi\right](x), \ D_x = d/dx; \ \forall \psi \in S_{1-\alpha}^{\alpha},$$

якщо $\varphi(\sigma) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \sigma^k$ (див. [127]).

Символом $P_{\alpha}^{1-\alpha}$ позначатимемо клас функцій (символів), які задовольняють сформульовані вище умови. Наприклад, нехай $\varphi(x) = P(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – поліном степеня $2b$, $b \in \mathbb{N}$, над полем комплексних чисел, який задовольняє умову

$$\exists c > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} : ReP(x) \leq -c|x|^{2b}.$$

Очевидно, що P – мультиплікатор у просторі $S_{\alpha}^{1-\alpha}$, де $\alpha = 1/(2b)$. Крім того,

$$|e^{P(x)}| = e^{ReP(x)} \leq e^{-c|x|^{2b}}, \ x \in \mathbb{R};$$

$$\exists c_1 > 0 \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C} : \ |e^{P(z)}| \leq e^{|P(z)|} \leq e^{c_1|z|^{2b}}.$$

Тоді з огляду на теореми 1–3 з [22], які є узагальненнями теореми Фрагмена-Ліндельофа, дістанемо, що ціла функція $e^{P(z)}$ у комплексній площині задовольняє нерівність

$$|e^{P(z)}| \leq c_0 e^{-c_2|x|^{2b}+c_3|y|^{2b}}, \ c_0, \ c_2, \ c_3 > 0.$$

З останньої нерівності та характеристики просторів S_α^β випливає, що $e^{P(z)} \in \overset{\circ}{S}{}_\alpha^{1-\alpha}$, де $\alpha = 1/(2b)$. Зазначимо також, що рівняння (2.32) у даному випадку набуває вигляду $\partial u/\partial t = P(iD_x)u$ і є рівнянням, параболічним за Петровським, а умови на функцію-символ φ є певними аналогами умови "параболічності" для еволюційних рівнянь з частинними похідними.

Для рівняння (2.32) задамо нелокальну багатоточкову за часом умову

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t,\cdot)|_{t=t_1} = f, \tag{2.33}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, +\infty)$ – фіксовані числа, причому

$$\mu > m \sum_{k=1}^{m} \mu_k, \ \ 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < +\infty, \ \ f \in S_{1-\alpha}^{\alpha}.$$

Розв'язок задачі (2.32), (2.33) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є. У результаті дістанемо, що

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x-\xi) f(\xi) d\xi = G(t,x) * f(x), \ \ (t,x) \in \Omega.$$

де $G(t,x) = F^{-1}\left[Q(t,\sigma)\right](x)$,

$$Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma), \ Q_1(t,\sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\},$$

$$Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k \varphi(\sigma)\}\right)^{-1} \equiv \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, \sigma)\right)^{-1}.$$

Дослідимо властивості функції $Q(t,\sigma)$ як функції аргумента σ.

Оскільки $\varphi \in P_\alpha^{1-\alpha}$, то існують числа $c_0, a, b > 0$, такі, що

$$|e^{\varphi(z)}| \leq c_0 \exp\{-a|\sigma|^{1/\alpha} + b|\tau|^{1/\alpha}\}, \quad z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}.$$

Надалі вважаємо, що стала $c_0 > 0$ задовольняє умову $c_0 \leq 1$. Тоді

$$|e^{t\varphi(z)}| = |e^{\varphi(z)}|^t \leq [c_0 \exp\{-a|\sigma|^{1/\alpha} + b|\tau|^{1/\alpha}\}]^t \leq$$
$$\leq \exp\{-at|\sigma|^{1/\alpha} + bt|\tau|^{1/\alpha}\} \tag{2.34}$$

З нерівності (2.34) випливає, що $Q_1(t,\cdot)$ як функція аргумента σ є елементом простору $S_\alpha^{1-\alpha}$ при кожному $t > 0$.

Лема 2.6. *Нехай $\varphi \in P_\alpha^{1-\alpha}$. Для функції $Q_1(t,\sigma)$, $t > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ та її похідних (за змінною σ) правильними є оцінки*

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \leq cA^s t^{s\alpha} s^{s(1-\alpha)} \exp\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\}, \; s \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.35}$$

де сталі c, A, $a_1 > 0$ не залежать від t.

Доведення здійснюється за схемою доведення леми 1. Отже, внаслідок інтегральної формули Коші,

$$D_\sigma^s Q_1(t,\sigma) = \frac{s!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{Q_1(t,z)}{(z-\sigma)^{s+1}} dz, \; s \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $\sigma \in \mathbb{R}$. Використовуючи (2.34), отримуємо нерівності

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \leq \frac{s!}{R^s} \max_{z\in\Gamma_R} |Q_1(t,z)| \leq \frac{s!}{R^s} \exp\{-at|\sigma_0|^{1/\alpha} + btR^{1/\alpha}\},$$

де σ_0 – точка максимуму функції $\exp\{-at|\xi|^{1/\alpha}\}$, $\xi \in [\sigma - R, \; \sigma + R]$. Зауважимо, що

$$\sigma_0 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |\sigma| \leq R, \\ \sigma + R, & \text{якщо } \sigma \leq -R, \\ \sigma - R, & \text{якщо } \sigma \geq R. \end{cases}$$

Оскільки $\alpha \in (0,1)$, то $1/\alpha - 1 > 0$, тому $\xi^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{\xi} \tau^{1/\alpha-1}d\tau$. Отже, $M(\xi) = \xi^{1/\alpha}$ є опуклою донизу на проміжку $(0,+\infty)$ функцією, яка задовольняє нерівність вигляду

$$M(\xi_1) + M(\xi_2) \leq M(\xi_1 + \xi_2),\ \xi_1, \xi_2 \in (0, +\infty)$$

або нерівність $M(\xi_1) - M(\xi_1 + \xi_2) \leq -M(\xi_2)$. Звідси випливає існування сталих $\tilde{a} > 0, \tilde{\tilde{a}} > 0$, що

$$\exp\{-M(\sigma_0)\} \leq \exp\{-M(\tilde{a}\sigma) + M(\tilde{\tilde{a}}R)\},\ \forall R > 0,\ \sigma \geq 0.$$

Отже, виконується нерівність

$$\exp\{-at|\sigma_0|^{1/\alpha}\} \leq \exp\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha} + a_2 t R^{1/\alpha}\},\ a_1, a_2 > 0.$$

Тоді

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \leq \frac{s!}{R^s}\exp\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha} + b_1 t R^{1/\alpha}\} \leq$$

$$\leq s! \inf_{R>0}(R^{-s}\exp\left\{b_1 t|R|^{1/\alpha}\right\} \cdot \exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\right\} =$$

$$= s!\omega^s t^{\alpha s} s^{-\alpha s}\exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\right\},\ s \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\omega = (\frac{b_1 e}{\alpha})^\alpha$. На підставі формули Стірлінга переконуємося, що при фіксованому $s \in \mathbb{Z}_+$ виконується нерівність

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \leq cA^s t^{s\alpha} s^{s(1-\alpha)}\exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\right\},$$

$$t \in (0, +\infty),\ \sigma \in \mathbb{R},$$

де сталі $c, A, a_1 > 0$ не залежать від t. Лема доведена.

Використовуючи методику доведення леми 2.2, доводимо, що правильними є нерівності

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \leq \tilde{c}A_1^s s^{s(1-\alpha)},\ \ s \in \mathbb{N},$$

де $\tilde{c} = c\mu^{-1}\sum\limits_{r=0}^{\infty}\tilde{\mu}^r r^s < +\infty$, $\tilde{\mu} = \mu^{-1}\mu_0 m < 1$, $c' = c\mu^{-1}$, $\mu_0 = \max\{\mu_1, ..., \mu_m\}$. З останньої нерівності та обмеженості функції Q_2 на $\mathbb{R}$ випливає, що Q_2 – мультиплікатор у просторі $S_\alpha^{1-\alpha}$. Звідси та на підставі леми 2.4 робимо висновок, що $Q(t,\sigma)$, як функція σ, є елементом простору $S_\alpha^{1-\alpha}$, при цьому справджуються нерівності

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| =\leq \tilde{b}\widetilde{B}^s s^{s(1-\alpha)} t^{s\alpha} \exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\right\}, \ t > 1 \tag{2.36}$$

де сталі $\tilde{b}$, $\tilde{B}$, $a_1 > 0$ не залежать від t.

Урахувавши властивості перетворення Фур'є та співвідношення $S_{1-\alpha}^\alpha = F\left[S_\alpha^{1-\alpha}\right]$, отримаємо, що $G(t,\cdot) \in S_{1-\alpha}^\alpha$ при кожному $t > 0$. Виділимо в оцінках функції G та її похідних (за змінною x) залежність від параметра t, якщо $t > 1$. Для цього скористаємось співвідношенням

$$x^k D_x^s F[g](x) = i^{k+s} F[(\sigma^s g(\sigma))^{(k)}] =$$
$$= i^{k+s}\int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s g(\sigma))^{(k)} e^{ix\sigma} d\sigma, \ \ \{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+, \ \ g \in S_\alpha^{1-\alpha}.$$

Отже,

$$x^k D_x^s G(t,x) = (2\pi)^{-1} i^{k+s}(-1)^s \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)} e^{ix\sigma} d\sigma.$$

У [22] доведено, що послідовність $m_{kn} = k^{k(1-\alpha)} n^{n\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, задовольняє нерівність

$$kn\frac{m_{k-1,n-1}}{m_{kn}} \leq \gamma(k+n), \ \ \gamma > 0.$$

Застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, оцінки (2.36) та останню нерівність, знайдемо, що для $t > 1$ справджуються нерівності

$$\left|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}\right| = \left|\sum_{p=0}^{k} C_k^p (\sigma^s)^{(p)} Q^{(k-p)}(t,-\sigma)\right| \leq$$

$$\leq \left|\sigma^s Q^{(k)}(t,-\sigma)\right| + ks\left|\sigma^{s-1}Q^{(k-1)}(t,-\sigma)\right| +$$

$$+\frac{k(k-1)}{2!}s(s-1)\left|\sigma^{s-2}Q^{(k-2)}(t,-\sigma)\right| + \dots \leq$$

$$\leq \tilde{b}A^s\tilde{B}^k k^{k(1-\alpha)}t^{k\alpha}s^{s\alpha}t^{-s\alpha}\exp\left\{-\frac{a_1}{2}t|\sigma|^{1/\alpha}\right\}\times$$

$$\times\Big(1+\frac{ks}{AB}\frac{m_{s-1,k-1}}{m_{sk}}+\frac{1}{2!}\frac{ks}{A^2B^2}\frac{m_{s-1,k-1}}{m_{sk}}(k-1)(s-1)\times$$

$$\times\frac{m_{s-2,k-2}}{m_{s-1,k-1}}+\dots\Big) \leq bA^s\tilde{B}^k t^{k\alpha}t^{-s\alpha}k^{k(1-\alpha)}s^{s\alpha}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{a_1}{2}t|\sigma|^{1/\alpha}\right\}\Big(1+\frac{\gamma}{AB}(k+s)+$$

$$+\frac{1}{2!}\frac{\gamma^2}{A^2B^2}(k+s)^2+\dots\Big) \leq \tilde{b}A^s\tilde{B}^k t^{k\alpha}t^{-s\alpha}k^{k(1-\alpha)}s^{s\alpha}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\gamma}{AB}(k+s)\right\}\exp\left\{-\frac{a_1}{2}t|\sigma|^{1/\alpha}\right\} \leq$$

$$\leq cA_1^sB_1^k t^{k\alpha}t^{-s\alpha}k^{k(1-\alpha)}s^{s\alpha}\exp\left\{-a_0t|\sigma|^{1/\alpha}\right\},$$

$$A_1 = A\exp\left(\frac{\gamma}{AB}\right),\ B_1=\tilde{B}\exp\left(\frac{\gamma}{AB}\right),\ a_0=\frac{a_1}{2},\ c=\tilde{b}.$$

Отже,

$$\left|x^kD_x^sG(t,x)\right| \leq c_1A_1^sB_1^kt^{-(s+1)\alpha}t^{k\alpha}k^{k(1-\alpha)}s^{s\alpha},$$

$$\{k,s\}\subset\mathbb{Z}_+,\ t>1,\ x\in\mathbb{R}.$$

Тоді

$$|D_x^sG(t,x)| \leq c_1A_1^ss^{s\alpha}t^{-(s+1)\alpha}\inf_k\frac{B_1^kk^{k(1-\alpha)}}{(t^{-\alpha}|x|)^k} \leq$$

$$\leq \widetilde{c}A_1^ss^{s\alpha}t^{-(s+1)\alpha}\exp\left\{-d_0(t^{-\alpha}|x|)^{1/(1-\alpha)}\right\},\ s\in\mathbb{Z}_+,\ t>1,$$

сталі $\widetilde{c}, A_1, d_0 > 0$ не залежать від t; тут ми скористалися відомою нерівністю з [22]

$$\inf_k\frac{L^kk^{k\omega}}{|x|^k} \leq L_0\exp\left\{-l|x|^{1/\omega}\right\},\quad L_0,l>0.$$

Таким чином, правильним є таке твердження.

Лема 2.7. *Для функції $G(t,x)$, $t > 1$, $x \in \mathbb{R}$, та її похідних (за змінною x) справджуються нерівності*

$$|D_x^s G(t,x)| \leq \widetilde{c} A_1^s s^{s\alpha} t^{-(s+1)\alpha} \exp\left\{-d_0 (t^{-\alpha}|x|)^{1/(1-\alpha)}\right\}, \ s \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.37}$$

сталі $\widetilde{c}, A_1, d_0$ не залежать від t.

Лема 2.8. *а) Функція $G(t,x)$, $t \in (0,+\infty)$, як абстрактна функція параметра t зі значеннями в просторі $S_{1-\alpha}^{\alpha}$, диференційовна по t.*

б) Правильною є формула

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f * G(t,x)\right) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}, \ \ \forall f \in \left(S_{1-\alpha}^{\alpha}\right)', \ \ t > 0.$$

в) У просторі $(S_{1-\alpha}^{\alpha})'$ справджується граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \to +0} G(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t \to t_l} G(t,\cdot) = \delta.$$

Доведення тверджень а), в) аналогічні доведенням лем 4. та 5. відповідно, твердження в) є наслідком твердження а).

Символом $(S_{1-\alpha}^{\alpha}, \ _*)'$ позначимо клас узагальнених функцій з $(S_{1-\alpha}^{\alpha})'$, які є згортувачами в просторі $S_{1-\alpha}^{\alpha}$.

Сформулюємо тепер m-точкову за часом задачу так: знайти розв'язок рівняння (2.32), який задовольняє умову:

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} u(t,\cdot) = f, \ \ f \in (S_{1-\alpha}^{\alpha}, \ _*)', \tag{2.38}$$

де граничне співвідношення (2.38) розглядається в просторі $(S_{1-\alpha}^{\alpha})'$ (обмеження на параметри μ, μ_1, $\ldots$, μ_m, t_1, $\ldots$, t_m) такі ж, як у випадку задачі (2.32), (2.33).

Теорема 2.4. *Задача* (2.32), (2.38) *коректно розв'язна. Розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x), \ \ (t,x) \in \Omega,$$

при цьому $u(t,\cdot) \in S^{\alpha}_{1-\alpha}$ *при кожному* $t > 0$.

Доведення теореми 4. аналогічне доведенню теореми 1..

Теорема 2.5. *Розв'язок* $u(t,x)$ *нелокальної багатоточкової за часом задачі* (2.32), (2.38) *стабілізується до нуля в просторі* $(S^{\alpha}_{1-\alpha})'$.

Доведення. Нагадаємо, що розв'язок задачі (2.32), (2.37) визначається формулою

$$u(t,x) = f * G(t,x) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle = \langle f_\xi, G(t,x-\xi)\rangle,$$

де G – фундаментальний розв'язок зазначеної задачі, $\check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi)$, T_{-x} – оператор зсуву в просторі $S^{\alpha}_{1-\alpha}$.

Нехай $\psi \in S^{\alpha}_{1-\alpha}$. Покладемо

$$\psi_t(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,x-\xi)\psi(x)dx,$$

$$\psi_{t,R}(\xi) = \int\limits_{-R}^{R} G(t,x-\xi)\psi(x)dx, \quad R > 0, \quad t > 1.$$

У цих позначеннях перевіримо, що: а) при кожному $t > 1$ і фіксованому $R > 0$ функція $\psi_{t,R}(\xi)$ належить до простору $S^{\alpha}_{1-\alpha}$ і $\psi_{t,R}(\xi) \to \psi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ у просторі $S^{\alpha}_{1-\alpha}$; б) $\psi_t(\xi) \in S^{\alpha}_{1-\alpha}$ для кожного $t \in (0,\infty)$. Звідси дістається, що

$$\langle u(t,x), \psi(x)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \langle f_\xi, G(t,x-\xi)\rangle \psi(x)dx =$$

$$= \langle f_\xi, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,x)\psi(x+\xi)dx\rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\psi(-(y-\xi))dy\rangle = \langle f_\xi, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\check{\varphi}(y-\xi)dy\rangle,$$

$$\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$$

(тут $u(t,\cdot)$ трактується як регулярна узагальнена функція з простору $(S^{\alpha}_{1-\alpha})'$ при кожному $t>0$).

Отже, встановимо а). При фіксованих $\{k,m\}\subset\mathbb{Z}_+$ маємо:

$$\left|\xi^k D^m_\xi \psi_{t,R}(\xi)\right| \le \int\limits_{-R}^{+R} \left|\xi^k \psi(x) D^m_\xi G(t,x-\xi)\right| dx \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\xi^k \psi(\xi+\eta) D^m_\eta G(t,\eta)\right| d\eta.$$

Але $\psi\in S^{\alpha}_{1-\alpha}$ і тому для деяких $c,\ L,\ M>0$

$$\left|\xi^k D^m_\xi \psi(\xi)\right| \le cL^k M^m k^{k(1-\alpha)} m^{m\alpha},\ \ \{k,m\}\subset\mathbb{Z}_+.$$

Звідси, при кожному $\eta\in\mathbb{R}$,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left|\xi^k\psi(\xi+\eta)\right| = \sup_{y\in\mathbb{R}}\left|(y-\eta)^k\psi(y)\right| =$$

$$= \sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\sum_{l=0}^{k} C^l_k y^l (-\eta)^{k-l}\psi(y)\right| \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{k} C^l_k |\eta|^{k-l} \sup_{y\in\mathbb{R}} |y^l\psi(y)| \le c\sum_{l=0}^{k} C^l_k L^l l^{l(1-\alpha)} |\eta|^{k-l}.$$

Далі скористаємося оцінками (2.37). Тоді

$$\left|\xi^k D^m_\xi \psi_{t,R}(\xi)\right| \le c\sum_{l=0}^{k} C^l_k L^l l^{l(1-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\eta^{k-l} D^m_\eta G(t,\eta)| d\eta \le$$

$$\le c\tilde{c}A_1^m t^{-(m+1)\alpha} m^{m\alpha} \sum_{l=0}^{k} C^l_k L^l l^{l(1-\alpha)} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\left\{-d_0(t^{-\alpha}|\eta|)^{1/(1-\alpha)}\right\} d\eta.$$

Здійснюючи тут заміну змінної інтегрування за формулою $\eta t^{-\alpha} = z$, прийдемо до нерівностей

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\left\{-d_0(t^{-\alpha}|\eta|)^{1/(1-\alpha)}\right\} d\eta = t^{(k-l+1)\alpha}\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} |z|^{k-l} \exp\left\{-d_0|z|^{1/(1-\alpha)}\right\} dz = 2t^{(k-l+1)\alpha}\times$$

$$\times \int_{0}^{+\infty} z^{k-l} \exp\left\{-\varepsilon z^{1/(1-\alpha)}\right\} \exp\left\{-(d_0-\varepsilon) z^{1/(1-\alpha)}\right\} dz \le$$

$$\le 2t^{(k-l+1)\alpha} \sup_{z\in[0,+\infty)} \left(z^{k-l} \exp\left\{-\varepsilon z^{1/(1-\alpha)}\right\}\right) \int_{0}^{+\infty} \times$$

$$\times \exp\left\{-(d_0-\varepsilon) z^{1/(1-\alpha)}\right\} dz \le c_0 t^{(k-l+1)\alpha}\times$$

$$\times L_0^{k-l}(k-l)^{(k-l)(1-\alpha)},\ c_0 = 2\int_{0}^{+\infty} \exp\left\{-(d_0-\varepsilon) z^{1/(1-\alpha)}\right\} dz,$$

$0 < \varepsilon < d_0,\ L_0 > 0,\ L_0$ – залежить лише від ε та α. Таким чином,

$$\left|\xi^k D_\xi^m \psi_{t,R}(\xi)\right| \le c_0 c\tilde{c} A_1^m t^{-(m+1)\alpha} m^{m\alpha} \sum_{l=0}^{k} C_k^l t^{(k-l+1)\alpha}\times$$

$$\times L_0^{k-l}(k-l)^{(k-l)(1-\alpha)} L^l l^{l(1-\alpha)} \le c_1 L_1^k A_2^m k^{k(1-\alpha)} m^{m\alpha}, \quad (2.39)$$

де $c_1 = c_0 c\tilde{c} t^{1-\alpha},\ L_1 = 2\max\{Lt^\alpha, L_0\},\ A_2 = A_1 t^{-\alpha}$. Отже, $\psi_{t,R}(\xi) \in S_{1-\alpha}^{\alpha}$ для кожного $t > 1$ і довільного $R > 0$. Далі безпосередньо переконуємося в тому, що $\psi_{t,R}(\xi) \to \psi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ рівномірно по ξ разом з усіма своїми похідними на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Крім того, сукупність функцій $\xi^k D_\xi^m \psi_{t,R}(\xi), \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+$, рівномірно обмежена в просторі $S_{1-\alpha}^{\alpha}$ (ця властивість випливає з оцінок (2.39), у яких сталі $c_1,\ L_1,\ A_2 > 0$ не залежать від R). Це і означає виконання умови а).

З умови а) випливає б), оскільки в досконалому просторі кожна обмежена множина є компактною.

Використовуючи властивості а), б), прийдемо до співвідношення

$$\langle u(t,\cdot), \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)(f * \check{\psi})(y)dy.$$

Подамо тепер функцію $\check{\psi}$ у вигляді: $\check{\psi}(x) = \check{\psi}_1(x) + \check{\psi}_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, де

$$\check{\psi}_1(x) = \frac{1}{2}[\check{\psi}(x) + \check{\psi}(-x)], \ \ \check{\psi}_2(x) = \frac{1}{2}[\check{\psi}(x) - \check{\psi}(-x)] -$$

відповідно парна та непарна частини функції $\check{\psi}$. Тоді, внаслідок властивості лінійної згортки,

$$\langle u(t,\cdot), \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\left[(f * \check{\psi}_1)(y) + (f * \check{\psi}_2)(y)\right] dy.$$

Зазначимо тепер, що коли g – парна (непарна) функція, то й згортка $f * g$ є парною (непарною) функцією. Справді, нехай, наприклад, g – парна функція. Тоді

$$(f*g)(x) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{g}(\xi)\rangle = \langle f_\xi, T_{-x}\check{g}(-\xi)\rangle = \langle f_\xi, \check{g}(-\xi-x)\rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \check{g}(-(\xi+x))\rangle = \langle f_\xi, \check{g}(\xi+x)\rangle = \langle f_\xi, T_x\check{g}(\xi)\rangle = (f*g)(-x).$$

Випадок непарної функції g розглядається аналогічно. Враховуючи це зауваження, дістаємо, що

$$\langle u(t,\cdot),\psi\rangle = 2\int\limits_0^\infty \Big[G_1(t,-y)(f*\check{\psi}_1)(y)+$$

$$+G_2(t,-y)(f*\check{\psi}_2)(y)\Big]dy,$$

де $G_1,\ G_2$ – відповідно парна та непарна частини функції G. Далі, не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $G(t,-y)$ є, наприклад, парною функцією змінної y. Тоді

$$\langle u(t,\cdot),\psi\rangle = 2\int\limits_0^\infty G(t,-y)(f*\check{\psi}_1)(y)dy =$$

$$= 2\int\limits_0^\infty G(t,-y)\left(\frac{d}{dy}\int\limits_0^y (f*\check{\psi}_1)(\tau)d\tau\right)dy =$$

$$= 2G(t,-y)\int\limits_0^y (f*\check{\psi}_1)(\tau)d\tau\ \Big|_0^\infty +$$

$$+2\int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}G(t,-y)\left(\int\limits_0^y (f*\check{\psi}_1)(\tau)d\tau\right)dy =$$

$$= 2\int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}G(t,-y)\left(\int\limits_0^y (f*\check{\psi}_1)(\tau)d\tau\right)dy.$$

Тут ми скористались тим, що $G(t,\cdot)\in S^\alpha_{1-\alpha}$ при кожному $t>0$. Крім того, функціонал f – згортувач у просторі $S^\alpha_{1-\alpha}$, тобто $f*\check{\psi}_1\in S^\alpha_{1-\alpha}$. Звідси випливає, зокрема, що

$$|(f*\check{\psi}_1)(\tau)|\le c\exp\left\{-a|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\}$$

з деякими сталими $c,\ a > 0$. Отже,

$$\left| \int\limits_0^y (f * \check{\psi}_1)(\tau) d\tau \right| \leq \int\limits_0^\infty |(f * \check{\psi}_1)(\tau)| d\tau \leq$$

$$\leq c \int\limits_0^\infty \exp\left\{ -a\tau^{1/(1-\alpha)} \right\} d\tau < +\infty.$$

Зазначимо також, що

$$\int\limits_0^y (f * \check{\psi}_1)(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int\limits_{-y}^y (f * \check{\psi}_1)(\tau) d\tau = y M_{y, \check{\psi}_1}(f),\ y > 0.$$

$$\left| M_{y, \check{\psi}_1(f)} \right| = \frac{1}{2y} \left| \int\limits_{-y}^y (f * \check{\psi}_1)(\tau) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{c}{2y} \int\limits_{-y}^y \exp\left\{ -a|\tau|^{1/(1-\alpha)} \right\} d\tau = \frac{c_2}{y} \to 0,$$

$$y \to +\infty.$$

Тоді, врахувавши оцінки (2.36) та останнє співвідношення, знайдемо, що

$$|\langle u(t, \cdot), \psi \rangle| = 2 \left| \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} G(t, -y) y M_{y, \check{\psi}_1}(f) dy \right| \leq$$

$$\leq \bar{c} t^{-2\alpha} \int\limits_0^\infty y \exp\left\{ -d_0 (t^{-\alpha} y)^{1/(1-\alpha)} \right\} M_{y, \check{\psi}_1}(f) dy.$$

Здійснимо заміну змінної інтегрування: $y = t^\alpha z$. Тоді

$$|\langle u(t, \cdot), \psi \rangle| \leq \bar{c} \int\limits_0^\infty z \exp\left\{ -d_0 z^{1/(1-\alpha)} \right\} M_{t^\alpha z, \check{\psi}_1}(f) dz.$$

Оскільки $M_{t^\alpha z, \check{\psi}_1}(f) \to 0$ при $t \to +\infty$, то перейшовши до границі при $t \to +\infty$ під знаком інтеграла дістанемо, що $\langle u(t, \cdot), \psi \rangle \to 0$ при $t \to +\infty$ для довільної функції $\psi \in S^{\alpha}_{1-\alpha}$, що й потрібно було довести.

Якщо узагальнена функція f в умові (2.38) є фінітною (тобто носій f ($supp\, f$) – обмежена множина в $\mathbb{R}$), то можна говорити про рівномірну стабілізацію до нуля розв'язку задачі (2.32), (2.38). Зазначимо також, що кожна фінітна узагальнена функція є згортувачем у просторі $S^{\alpha}_{1-\alpha}$ (див. п. 2.3).

Теорема 2.6. *Нехай $u(t, x)$ – розв'язок задачі* (2.32), (2.38) *з граничною функцією f в умові* (2.38), *яка є елементом простору $(S^{\beta}_{1-\alpha})' \subset (S^{\alpha}_{1-\alpha})'$, $\beta > 1$, і $supp\, f$ – обмежена множина в $\mathbb{R}$. Тоді $u(t, x) \to 0$ при $t \to +\infty$ рівномірно на $\mathbb{R}$.*

Доведення. Нехай $supp\, f \subset [a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}$. Розглянемо функцію $\psi \in S^{\beta}_{1-\alpha}, \beta > 1$, таку, що $\psi(x) = 1$ для $x \in [a_1, b_1]$ і $supp\, \psi \subset [a_2, b_2]$. Така функція існує, оскільки простір $S^{\beta}_{1-\alpha}$ при $\beta > 1$ містить фінітні функції [22]. Функції $\psi(\xi)G(t, x - \xi)$, $(1 - \psi(\xi))G(t,\ x - \xi)$, як функції ξ, є елементами простору $S^{\beta}_{1-\alpha}$ (при кожному $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}$), тому

$$u(t, x) = \langle f_\xi, \psi(\xi)G(t, x - \xi)\rangle + \langle f_\xi, \gamma(\xi)G(t, x - \xi)\rangle,$$

де $\gamma(\xi) = 1 - \psi(\xi)$. Другий доданок у цій рівності дорівнює нулеві, бо $supp\, (\gamma(\xi)G(t, x - \xi)) \cap supp f = \varnothing$. Тому

$$u(t, x) = t^{-\alpha/2}\langle f_\xi, t^{\alpha/2}\psi(\xi)G(t, x - \xi)\rangle.$$

Отже, для доведення сформульованого твердження досить показати, що сукупність функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = t^{\alpha/2}\psi(\xi)G(t, x - \xi)$ є обмеженою в просторі $S^{\beta}_{1-\alpha}$ при великих значеннях t та $x \in \mathbb{R}$, тобто

$$|D^m_\xi \Phi_{t,x}(\xi)| \le cB^m m^{m\beta} \exp\left\{-a|\xi|^{1/(1-\alpha)}\right\},\ m \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.40)$$

де сталі $c, a, B > 0$ не залежать від t, x і ξ, які змінюються вказаним способом. Оцінку (2.40) достатньо встановити лише для $\xi \in [a_2, b_2]$, бо $\Phi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [a_2, b_2]$.

Оскільки $\psi \in S_{1-\alpha}^{\beta}$, то

$$|D_\xi^m \psi(\xi)| \leq c_1 B_1^m m^{m\beta} \exp\left\{-a_1 |\xi|^{1/(1-\alpha)}\right\}$$

з деякими сталими $c_1, a_1, B_1 > 0$. Звідси та з оцінок (2.37) (при $t > 1$) випливають нерівності

$$|D_\xi^m \Phi_{t,x}(\xi)| \leq t^{\alpha/2} \left| \sum_{l=0}^{m} C_m^l D_\xi^l \psi(\xi) D_\xi^{m-l} G(t, x - \xi) \right| \leq$$

$$\leq c_1 \tilde{c} t^{\alpha/2} \exp\left\{-d_0 (t^{-\alpha}|x - \xi|)^{1/(1-\alpha)} - a_1 |\xi|^{1/(1-\alpha)}\right\} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{m} C_m^l B_1^l l^{l\beta} t^{-(m-l+1)\alpha} A_1^{m-l} (m-l)^{(m-l)\alpha}.$$

Врахуємо тепер очевидні нерівності при $t \geq 1,\ x \in \mathbb{R},\ \xi \in [a_2, b_2]:$

$$t^{\alpha/2-(m-l+1)\alpha} \exp\left\{-d_0 (t^{-\alpha}|x - \xi|)^{1/(1-\alpha)}\right\} \leq 1,$$

$$l \in \{0, 1, \ldots, m\}.$$

Тоді

$$|D_\xi^m \Phi_{t,x}(\xi)| \leq c B^m m^{m\beta} \exp\left\{-a |\xi|^{1/(1-\alpha)}\right\},$$

де $c = c_1 \tilde{c},\ B = 2\max\{A_1, B_1\}$ і всі сталі не залежать від t, x, ξ. Теорема доведена.

Розділ 3. Еволюційні рівняння з гармонійним осцилятором

Встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для диференціально-операторних рівнянь другого порядку з гармонійним осцилятором і функціями від такого оператора у випадку, коли гранична функція є узагальненою функцією типу ультрарозподілів і ототожнюється з певним формальним рядом Фур'є-Ерміта. Знайдено зображення розв'язку задачі у вигляді згортки фундаментального розв'язку з граничною функцією.

3.1. Простори основних та узагальнених елементів

Нехай A – невід'ємний самоспряжений оператор з суто дискретним спектром у сеперабельному гільбертовому просторі H зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$, $\{e_k, k \geq 1\}$ - ортонормований базис з його власних векторів, $\{\lambda_k, k \geq 1\}$ – послідовність відповідних власних чисел, розміщених у порядку зростання, при цьому кожне власне число береться стільки разів, якою є його кратність, і $\sum\limits_{k:\lambda_k \neq 0} \lambda_k^{-p} < \infty$ при деякому $p > 0$.

Позначимо

$$\Phi_m = \left\{\varphi \in H \,\middle|\, \varphi = \sum_{k=1}^{m} c_{k,\varphi} e_k,\ c_{k,\varphi} \in \mathbb{C}\right\},\ \Phi = \lim_{m\to\infty} \operatorname{ind} \Phi_m$$

(очевидно, що Φ лежить щільно в H та інваріантно відносно A), а через Φ' – простір усіх антилінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. Зіставлення

$$H \ni \varphi \longrightarrow f_\varphi \in \Phi' : \ \langle f_\varphi, \psi\rangle = (\varphi, \psi), \forall \psi \in \Phi,$$

визначає вкладення $H \subset \Phi'$ ($\langle f, \psi\rangle$ позначає дію функціонала f на элемент ψ). Елементи з Φ' називаються узагальненими.

Нехай s – простір усіх числових послідовностей $\{s_k, k \geq 1\}$ ($s_k \in \mathbb{C}$) з покоординатною збіжністю. Ізоморфізм J: $f \to \{c_k(f) = \langle f, e_k \rangle, k \geq 1\} \in s$ із Φ' на s відображає Φ на множину фінітних послідовностей із s, а H – на l_2. При цьому оператору A відповідає операція $\{c_k(f), k \geq 1\} \to \{\lambda_k c_k(f), k \geq 1\}$ і його можна розширити на Φ' до неперервного оператора $\hat{A}$: $\hat{A}f = J^{-1}\{\lambda_k c_k(f),\, k \geq 1\}$.

Нехай $f \in \Phi'$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, де $c_k = \langle f, e_k \rangle$, називається рядом Фур'є елемента $f \in \Phi'$, а числа c_k – його коефіцієнтами Фур'є. Для довільного елемента $f \in \Phi'$ його ряд Фур'є збігається в Φ' до f. Навпаки, довільний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ збігається в Φ' до деякого елемента $f \in \Phi'$ і цей ряд є рядом Фур'є для f [66]. Отже, Φ' можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$.

Введемо тепер деякі класи елементів, які породжені оператором A. Позначимо

$$H_\infty(A) := \lim_{\alpha \to \infty} \operatorname{pr} H_\alpha(A), \quad H_\alpha(A) = \mathcal{D}(A^\alpha),$$

$$G_{\beta,B}(A) := \{\varphi \in H_\infty(A) |\, \exists c > 0\ \exists B > 0\ \forall n \in \mathbb{N} :$$
$$\|A^n \varphi\| \leq c B^n n^{n\beta}\},$$

де $\beta > 0$ – фіксований параметр. Простір $G_{\beta,B}(A)$ є банаховим відносно норми $\|\varphi\|_{\beta,B} = \sup\limits_n (\|A^n\varphi\|/(B^n n^{n\beta}))$. Простір $G_{\{\beta\}}(A) := \lim\limits_{B \to \infty} \operatorname{ind} G_{\beta,B}(A)$ називається простором Жевре порядку β. Якщо через $H'_\infty(A)$, $G'_{\{\beta\}}(A)$ позначити простори, топологічно спряжені з просторами $H_\infty(A)$, $G_{\{\beta\}}(A)$ відповідно, то, згідно [66], прийдемо до ланцюжка щільних і неперервних вкладень $\Phi \subset G_{\{\beta\}}(A) \subset H_\infty(A) \subset H \subset H'_\infty(A) \subset G'_{\{\beta\}}(A) \subset \Phi', \beta > 1$.

Символом $H_{\alpha,\beta}$ позначимо сукупність тих елементів $f \in \Phi'$, для яких при деякому $\alpha > 0$

$$\|f\|^2_{H_{\alpha,\beta}} := \sum_{k=1}^{\infty} \exp(2\alpha\lambda_k^{1/\beta})|c_k|^2 < \infty,$$

$c_k = \langle f, e_k \rangle$, $k \in \mathbb{N}$, і покладемо $H_{\{\beta\}} = \lim\limits_{\alpha \to +0} \mathrm{ind} H_{\alpha,\beta}$. Відповідно, $H'_{\{\beta\}} = \lim\limits_{\alpha \to +0} \mathrm{pr} H'_{\alpha,\beta}$. Як доведено в [66], $G_{\{\beta\}}(A) = H_{\{\beta\}}$.

Простори $G_{\{\beta\}}(A)$, $G'_{\{\beta\}}(A)$ з точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їх елементів описуються так [66]:

$$(f \in G_{\{\beta\}}(A)) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0\, \exists c > 0\, \forall k \in \mathbb{N} :$$

$$|c_k(f)| \le c \exp(-\mu\lambda_k^{1/\beta}));$$

$$(f \in G'_{\{\beta\}}(A)) \Leftrightarrow (\forall \mu > 0\, \exists c = c(\mu) > 0 \forall k \in \mathbb{N} :$$

$$|c_k(f)| \le c \exp(\mu\lambda_k^{1/\beta})).$$

Нехай $\{f_1, f_2\} \subset \Phi'$, $\quad f_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(f_1) e_k$, $f_2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(f_2) e_k$. У просторі Φ' визначимо операцію "$*$", яку називатимемо "абстрактною згорткою" (або просто згорткою) і задамо формулою

$$f_1 * f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1) c_k(f_2) e_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1 * f_2) e_k,$$

тобто $c_k(f_1 * f_2) = c_k(f_1) c_k(f_2)$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

3.2. Функції Ерміта. Формальні ряди Фур'є-Ерміта

Функція F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ваговою, якщо вона невід'ємна і така, що абсолютно збігаються інтеграли

$\alpha_n = \int\limits_{\mathbb{R}} x^n F(x)dx$, $n \in \mathbb{Z}_+$, які називаються степеневими моментами функції F. Наприклад, за F, зокрема, можна взяти функцію $\exp(-x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Користуючись методом математичної індукції можна довести (див. [295]), що

$$(e^{-x^2})^{(n)} = e^{-x^2} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k},\ n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R}.$$

Отже, функція $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, є многочленом степеня n. Цей многочлен називається стандартизованим многочленом Ерміта, а відповідна формула – формулою Родріга. Многочлени H_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, ортогональні на $\mathbb{R}$ з ваговою функцією F; при цьому

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x)dx = \sqrt{\pi} 2^n n!, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, ортонормовані многочлени Ерміта $\hat{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, мають вигляд

$$\hat{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)},\ n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R}.$$

Многочлени $\hat{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, побудовані за ваговою функцією $F(x) = \exp(-x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, утворюють ортонормований базис у просторі $L_2(\mathbb{R}, \exp(-x^2))$. У просторі ж $L_2(\mathbb{R})$ ортонормований базис утворюють функції Ерміта

$$h_n(x) = e^{-x^2/2} \hat{H}_n(x) = (-1)^n \pi^{-1/4} (2^n n!)^{-1/2} e^{x^2/2} (e^{-x^2})^{(n)},$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

У просторі $H = L_2(\mathbb{R})$ розглянемо гармонійний осцилятор – невід'ємний самоспряжений оператор A, який є замиканням оператора $-d^2/dx^2 + x^2$, заданого на множині фінітних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій. Спектр цього оператора дискретний, його власні числа $\lambda_k = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, власні функції – функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$ [51]. Простір Φ у даному випадку складається з функцій φ вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} c_{k,\varphi} h_k(x), c_{k,\varphi} \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k$, де $c_k = \langle f, h_k \rangle$, називається рядом Фур'є-Ерміта функціонала $f \in \Phi'$, а числа c_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, – його коефіцієнтами Фур'є (надалі елементи простору Φ' називатимемо узагальненими функціями). Простір Φ' у даному конкретному випадку можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k$.

У праці [51] доведено, що $S_{\beta/2}^{\beta/2} = G_{\{\beta\}}(A)$ при $\beta \geq 1$, де A – гармонійний осцилятор. Тоді, як випливає із загальної теорії невід'ємних самоспряжених операторів у гільбертовому просторі з дискретним спектром (див. п. 3.1), простори S_β^β, $(S_\beta^\beta)'$, $\beta \geq 1/2$, можна охарактеризувати так.

Якщо $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in \Phi'$, $c_k = \langle f, e_k \rangle$, то правильними є такі співвідношення еквівалентності:

а) $(f \in S_\beta^\beta) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0\, \exists c > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+ : |c_k| \leq c \exp(-\mu(2k+1)^{1/(2\beta)}))$; (А)

б) $(f \in (S_\beta^\beta)') \Leftrightarrow (\forall \mu > 0 \exists c = c(\mu) > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ : |c_k| \leq c \exp(\mu(2k+1)^{1/(2\beta)}))$. (Б)

3.3. Функції від гармонійного осцилятора

Нехай B – невід'ємний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі H з щільною у H областю визначення $\mathcal{D}(B)$, $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ – деяка неперервна функція, яка строго монотонно зростає на $[0,+\infty)$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} f(\lambda) = +\infty$. За функцією f і оператором B на множині

$$\mathcal{D}(f(B)) = \Big\{\varphi \in H \,\Big|\, \int\limits_0^\infty f^2(\lambda) d(E_\lambda f, f) < \infty\Big\},$$

де E_λ, $\lambda \in [0,+\infty)$, – спектральна функція оператора B, будуємо оператор $f(B)$:

$$f(B)\varphi = \int\limits_0^\infty f(\lambda) dE_\lambda \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(f(B)), \tag{3.1}$$

який також невід'ємний і самоспряжений в H, при цьому $\overline{\mathcal{D}(f(B))} = H$ [51]. Інтеграл (3.1) береться, фактично, лише по спектру $\sigma(B)$ оператора B, тобто

$$f(B)\varphi = \int\limits_{\sigma(B)} f(\lambda) dE_\lambda \varphi, \varphi \in \mathcal{D}(f(B)).$$

Якщо $B = A$ – гармонійний осцилятор, то $\sigma(A) = \{\lambda_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, де $\lambda_k = 2k+1$. Спектральна функція E_λ, $\lambda \in [0,+\infty)$, оператора A є кусково-сталою і має розриви у точках λ_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, причому $E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k}$ – оператор проектування на власний підпростір оператора A, який відповідає власному значенню λ_k. Цей підпростір є одновимірним, відповідна функція Ерміта h_k утворює його базис. Отже,

$$(E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k})\varphi = (\varphi, h_k)_{L_2(\mathbb{R})} \cdot h_k = c_k(\varphi) h_k;$$

спектральна функція E_λ, $\lambda \in [0, +\infty)$, у цьому випадку має вигляд

$$(E_\lambda \varphi)(x) = \sum_{\lambda_k < \lambda} c_k(\varphi) h_k(x),$$

а інтеграл (3.1) є таким:

$$(f(A)\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)(E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k})\varphi(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(\varphi) h_k(x), \varphi \in \mathcal{D}(f(A)),$$

при цьому $\mathcal{D}(f(A)) = \Big\{\varphi \in L_2(\mathbb{R}) \Big| \sum\limits_{k=0}^{\infty} f^2(\lambda_k)|c_k(\varphi)|^2 < \infty, \lambda_k = 2k+1\Big\}$, $f(\lambda_k)$ – власні числа оператора $f(A)$. Оператор $f(A)$ продовжимо на Φ' до неперервного оператора $\hat{f}(A)$:

$$\hat{f}(A)\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(\varphi) h_k, \ \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi) h_k \in \Phi'.$$

Розглянемо узагальнену функцію G_f із простору Φ', побудовану за функцією f:

$$G_f = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) h_k.$$

Тоді $\hat{f}(A)$ – оператор згортки, який діє у просторі Φ':

$$\hat{f}(A)\varphi = G_f * \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(\varphi) h_k.$$

Символом A_f будемо позначати звуження оператора $\hat{f}(A)$ на простір $S_{\beta/2}^{\beta/2} = G_{\{\beta\}}(A)$, $\beta \geq 1$; при цьому

$$\Phi \subset S_{\beta/2}^{\beta/2} \subset L_2(\mathbb{R}) \subset (S_{\beta/2}^{\beta/2})' \subset \Phi', \beta \geq 1.$$

Лема 3.1. *Нехай* $G_f \in (S^{\beta/2}_{\beta/2})'$, *тоді оператор* A_f *є неперервним у просторі* $S^{\beta/2}_{\beta/2}$.

Доведення. Передусім доведемо, що $G_f * \varphi \in S^{\beta/2}_{\beta/2}$ для довільної функції $\varphi \in S^{\beta/2}_{\beta/2}$. Справді, оскільки $G_f \in (S^{\beta/2}_{\beta/2})'$, то із умови (Б) випливає, що

$$\forall \mu_1 > 0 \; \exists c_1 = c_1(\mu_1) > 0 \; \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$|c_k(G_f)| = f(\lambda_k) \leq c_1 \exp(\mu_1 \lambda_k^{1/\beta}), \qquad (3.2)$$

де $\lambda_k = 2k + 1$. Крім того, $\varphi \in S^{\beta/2}_{\beta/2}$, тому, з урахуванням умови (А),

$$\exists \mu_2 > 0 \; \exists c_2 > 0 \; \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \;\; |c_k(\varphi)| \leq c \exp(-\mu_2 \lambda_k^{1/\beta}).$$

Тоді

$$|c_k(G_f * \varphi)| = |c_k(G_f)| \cdot |c_k(\varphi)| \leq c_1 c_2 \exp(-(\mu_2 - \mu_1)\lambda_k^{1/\beta}).$$

Візьмемо $\mu_1 = \mu_2/2$, тоді

$$|c_k(G_f * \varphi)| \leq \tilde{c} \exp(-\tilde{\mu} \lambda_k^{1/\beta}), \tilde{c} = c_1 c_2,$$

$\tilde{\mu} = \mu_2/2$, звідки й випливає, що $G_f * \varphi \in S^{\beta/2}_{\beta/2}$. Отже, оператор A_f відображає простір $S^{\beta/2}_{\beta/2}$ в себе. Доведемо, що A_f – неперервний оператор у просторі $S^{\beta/2}_{\beta/2}$, тобто довільну обмежену множину цього простору він відображає в обмежену множину цього ж простору (відзначимо, що в просторі $S^{\beta/2}_{\beta/2}$, $\beta \geq 1$, клас неперервних операторів співпадає з класом обмежених операторів [22]).

Нехай L – обмежена множина у просторі $S^{\beta/2}_{\beta/2} = G_{\{\beta\}}(A) = \bigcup\limits_{\alpha > 0} H_{\alpha,\beta}$. Тоді L – обмежена множина у гільбертовому просторі $H_{\alpha,\beta}$ при деякому $\alpha > 0$, тобто $\exists b >$

$0\ \forall\psi \in L:$

$$\|\psi\|^2_{H_{\alpha,\beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha\lambda_k^{1/\beta})|c_k(\psi)|^2 \le b^2,\ \lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+,$$

або

$$\forall\psi \in L:\ \ |c_k(\psi)| \le b\exp(-\alpha\lambda_k^{1/\beta}), k \in \mathbb{Z}_+.$$

У нерівності (3.2) покладемо $\mu_1 = \alpha/2$. Тоді

$$|c_k(A_f\psi)| = |c_k(G_f)| \cdot |c_k(\psi)| \le c_1 b\exp(-(\alpha-\mu_1)\lambda_k^{1/\beta}) =$$

$$= b_2\exp(-\alpha_1\lambda_k^{1/\beta}),\ \alpha_1 = \alpha/2,\ b_2 = c_1 b,$$

і

$$|c_k(A_f\psi)|\exp\Big(\frac{\alpha_1}{2}\lambda_k^{1/\beta}\Big) \le b_2\exp\Big(-\frac{\alpha_1}{2}\lambda_k^{1/\beta}\Big), k \in \mathbb{Z}_+.$$

Звідси випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|c_k(A_f\psi)|\exp\Big(\frac{\alpha_1}{2}\lambda_k^{1/\beta}\Big)$. Таким чином, множина A_fL обмежена у просторі $H_{\alpha_1/2,\beta} = H_{\alpha/4,\beta}$, тобто у просторі $S^{\beta/2}_{\beta/2}$. Твердження доведено.

Надалі вважатимемо, що функція f задовольняє умову:

$$\exists d_0, d_1, d_2 > 0, d_1 \ge d_0, \forall\lambda \in [0,\infty):$$
$$d_0\lambda^{2/\beta} \le f(\lambda) \le d_1\lambda^{2/\beta} + d_2. \tag{3.3}$$

3.4. Нелокальна багатоточкова за часом задача

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{dt^2} - A_f u(t,x) = 0, \tag{3.4}$$

де $(t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R} \equiv \Omega$, A_f – оператор, побудований в п. 3.3 за функцією f.

Під розв'язком рівняння (3.4) розумітимемо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка задовольняє умови: 1) $u(t,\cdot) \in C^2((0,\infty), S_{\beta/2}^{\beta/2})$ і задовольняє рівняння (3.4); 2) для довільного фіксованого проміжку $[\delta,+\infty) \subset (0,+\infty)$ існує стала $c = c(\delta) > 0$ така, що

$$\sup_{t\in[\delta,+\infty]} \|u(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le c.$$

Теорема 3.1. *Функція u є розв'язком рівняння* (3.4) *тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді*

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) c_k h_k(x), \tag{3.5}$$

$$(t,x) \in \Omega, \lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\psi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, $\beta \ge 1$.

Доведення. Нехай u задається формулою (3.5). Доведемо, що $u(t,\cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ при кожному $t > 0$. Оскільки $\psi \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, то

$$\forall \mu > 0\, \exists c = c(\mu) > 0 : |c_k| \le c \exp(\mu \lambda_k^{1/\beta}), \; k \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.6}$$

Враховуючи (3.3), (3.6), а також співвідношення

$$c_k(u(t,x)) = c_k \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}),$$

знайдемо, що

$$|c_k(u(t,x))| \le c \exp(\mu\lambda_k^{1/\beta}) \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) \le$$

$$\le c \exp(\mu\lambda_k^{1/\beta}) \exp(-\sqrt{d_0} t \lambda_k^{1/\beta}) = c \exp(-(\sqrt{d_0} t - \mu)\lambda_k^{1/\beta}).$$

Візьмемо $\mu = \sqrt{d_0} t/2$. Тоді

$$|c_k(u(t,x))| \le c \exp(-\mu\lambda_k^{1/\beta}), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

звідси випливає, що $u(t,\cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ при кожному $t > 0$.

Функція $u(t,x)$ диференційовна за $t \in (0,\infty)$ (для довільного $x \in \mathbb{R}$). Справді, нехай $t \in [\varepsilon, +\infty)$, де $\varepsilon > 0$. Доведемо, що ряд

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{f(\lambda_k)} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) c_k h_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma(t,x,\lambda_k) \quad (3.7)$$

збігається рівномірно по t, тоді

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma(t,x,\lambda_k).$$

Враховуючи нерівності (3.3), (3.6), а також те, що $|h_k(x)| \le 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, для $t \ge \varepsilon$ і довільного, фіксованого $k \in \mathbb{N}$, маємо

$$|\gamma(t,x,\lambda_k)| \le c\sqrt{\tilde{d}}\lambda_k^{1/\beta} \exp(-\varepsilon\sqrt{d_0}\lambda_k^{1/\beta})\cdot$$

$$\cdot \exp(\mu\lambda_k^{1\beta}) \le c\sqrt{\tilde{d}}\cdot\frac{2}{\varepsilon} \exp\left(-\left(\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{d_0} - \mu\right)\lambda_k^{1\beta}\right), \tilde{d} = \max\{d_1, d_2\}. \quad (3.8)$$

Нехай $\mu = \varepsilon\sqrt{d_0}/4$. Тоді $|\gamma(t,x,\lambda_k)| \le \tilde{c}\sqrt{\tilde{d}} \exp(-\mu\lambda_k^{1/\beta})$. Звідси отримуємо, що ряд (3.7) збігається рівномірно по $t \in [\varepsilon, +\infty)$. Оскільки $\varepsilon > 0$ – довільне, то функція $u(t,x)$ диференційовна за t на проміжку $(0,+\infty)$, а співвідношення (3.8) має місце для кожного $t \in (0,+\infty)$. Аналогічно можна довести, що функція $u_t(t,x)$ диференційовна за $t \in (0,\infty)$. Отже, $u(t,\cdot) \in C^2((0,\infty), S_{\beta/2}^{\beta/2})$.

Функція u задовольняє рівняння (3.4). Справді,

$$A_f u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(u(t,x)) h_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) c_k h_k(x).$$

З іншого боку, при доведенні диференційовності функції $u(t,x)$ встановлено, що

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) c_k h_k(x).$$

Таким чином, $u(t,x)$ – розв'язок рівняння (3.4).

Перевіримо виконання умови 2). Маємо, що

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(u(t,x))|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \exp(-2t\sqrt{f(\lambda_k)}).$$

Враховуючи умову (3.3) і нерівності (3.6), знайдемо, що для $t \geq \delta > 0$

$$|c_k| \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) \leq c \exp(\mu \lambda_k^{1/\beta}) \cdot \exp(-t\sqrt{d_0}\lambda_k^{1/\beta}) \leq$$

$$\leq c \exp(-(\delta\sqrt{d_0} - \mu)\lambda_k^{1/\beta}), \lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Візьмемо $\mu = \delta\sqrt{d_0}/2$. Тоді для $t \geq \delta$ виконується нерівність

$$|c_k| \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) \leq c \exp(-\mu \lambda_k^{1/\beta}).$$

Звідси отримуємо, що

$$\sup_{t \in [\delta, +\infty)} \|u(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leq c^2 \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-2\mu \lambda_k^{1/\beta}) = \tilde{c}(\delta) > 0.$$

Отже, умова 2) виконується.

Навпаки, нехай u – розв'язок рівняння (3.4). Тоді $u(t,\cdot) \in S^{\beta/2}_{\beta/2} \subset L_2(\mathbb{R})$ при кожному $t > 0$, при цьому

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) h_k(x), \; c_k(t) = (u(t,x), h_k)_{L_2(\mathbb{R})}, k \in \mathbb{Z}_+,$$

причому

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(t)|^2, \quad t > 0. \tag{3.9}$$

Помножимо (3.4) скалярно на h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$; тоді

$$\Big(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}, h_k\Big) = (A_f u(t,x), h_k), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

При фіксованому $k \in \mathbb{Z}_+$ маємо:

$$(A_f u(t,x), h_k) = (u(t,x), A_f h_k) = (u(t,\cdot), f(\lambda_k) h_k) =$$

$$= f(\lambda_k)(u(t,\cdot), h_k) = f(\lambda_k) c_k(t).$$

Оскільки

$$\Big(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}, h_k\Big) = \frac{d^2}{dt^2}(u(t,\cdot), h_k) = c''_k(t), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

то функція $c_k(t)$ (при фіксованому $k \in \mathbb{Z}_+$) задовольняє рівняння

$$c''_k(t) - f(\lambda_k) c_k(t) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in (0, +\infty),$$

загальний розв'язок якого дається формулою

$$c_k(t) = c_k^{(1)} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) + c_k^{(2)} \exp(t\sqrt{f(\lambda_k)}), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

де $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$ – довільні сталі. Із (3.9), вигляду коефіцієнтів $c_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, і умови 2), яку задовольняє функція $u(t,\cdot)$, випливає, що $c_k^{(2)} = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, тобто $c_k(t) = c_k^{(1)} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)})$. Отже, якщо $u(t,\cdot)$ – розв'язок рівняння (3.4), то $u(t,\cdot)$ має вигляд

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) h_k(x).$$

Доведемо тепер, що

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} h_k \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'.$$

Для цього скористаємося тим, що $\|u(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le c$, $c = c(t) > 0$, для кожного $t > 0$. Звідси випливає нерівність

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k^{(1)}|^2 \exp(-2t\sqrt{f(\lambda_k)}) \le c^2,$$

тобто $|c_k^{(1)}| \le c \exp(t\sqrt{f(\lambda_k)})$. Із умови (3.3), яку задовольняє функція f випливає, що для кожного $t > 0$ існує стала $c = c(t) > 0$ така, що

$$|c_k^{(1)}| \le c \exp(t\sqrt{\tilde{d}}\lambda_k^{1/\beta}),$$

$\tilde{d} = \max\{d_1, d_2\}$, $\lambda_k = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, звідси випливає, що $\psi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} h_k \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$. Теорема доведена.

Зауваження 3.1. *Введемо позначення*

$$G(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) h_k(x).$$

Із властивостей функції f випливає, що $G(t,\cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ для кожного $t > 0$. Крім того, $u(t,x) = G(t,x) * \psi \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$, $\forall \psi \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$. Отже, оператор згортки $G(t,x) * \cdot$ переводить кожний елемент простору $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$ (зокрема, кожний елемент простору $S_{\beta/2}^{\beta/2} \subset (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$) у розв'язок рівняння (3.4).

Поставимо задачу: у множині розв'язків рівняння (3.4) вигляду (3.5) знайти розв'язок, який задовольняє умову

$$\mu u(0,\cdot) - \sum_{n=1}^{m} \mu_n u(t_n,\cdot) = g, \tag{3.10}$$

де $g \in H = L_2(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, \infty)$ – фіксовані числа, $\mu > \sum_{n=1}^{m} \mu_n$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$; при цьому $u(0, \cdot)$ розуміємо як $\lim_{t \to +0} u(t, \cdot)$, де границя розглядається в $L_2(\mathbb{R})$. Таку задачу називатимемо нелокальною багатоточковою за часом задачею для рівняння (3.4). Із теореми 1. і зауваження 1. випливає, що задачу (3.4), (3.10) можна поставити ще і так: у класі $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$ знайти елемент ψ, який утворює згортку з функцією $G(t, x)$ і є розв'язком рівняння (3.4), який задовольняє умову (3.10). Для розв'язності цієї задачі необхідно знайти коефіцієнти Фур'є $c_k = c_k(\psi)$ такого елемента. Для цього помножимо (3.10) скалярно на h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, враховуючи при цьому, що

$$c_k(u(t, \cdot)) = c_k(G(t, \cdot))c_k(\psi), \quad c_k(G(t, \cdot)) = \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}).$$

У результаті прийдемо до співвідношень

$$\mu c_k(G(0, \cdot))c_k(\psi) - \sum_{n=1}^{m} \mu_n c_k(G(t_n, \cdot))c_k(\psi) = c_k(g),$$

$$c_k(G(0, \cdot)) = 1.$$

Отже,

$$c_k(\psi) = c_k(g)\Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \exp(-t_n\sqrt{f(\lambda_k)})\Big)^{-1}.$$

Введемо позначення:

$$Q_1(t, \lambda_k) = \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}).$$

Тоді

$$c_k(\psi) = c_k(g) \cdot \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n, \lambda_k)\Big)^{-1}.$$

Відмітимо, що

$$\Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n, \lambda_k)\big)^{-1} \le \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n\big)^{-1} \equiv \mu_0.$$

Тоді

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(\psi)|^2 \le \mu_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(g)|^2 = \mu_0^2 \|g\|_H^2, \quad g \in H,$$

тобто елемент ψ, за допомогою якого будується розв'язок задачі (3.4), (3.10), належить до $L_2(\mathbb{R})$. При цьому розв'язок задається формулою

$$u(t,x) = G(t,x) * \psi, \ \psi = \sum_{k=1}^{\infty} Q_2(\lambda_k) c_k(g) h_k,$$

$$Q_2(\lambda_k) := \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n, \lambda_k)\Big)^{-1}$$

або

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) h_k(x) = G_1(t,x) * g,$$

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) h_k \in H,$$

де

$$G_1(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k,$$

$G_1(t,\cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$, при кожному $t \in (0,+\infty)$.

Теорема 3.2. *Нелокальна багатоточкова за часом задача (3.4), (3.10) є коректно розв'язною, розв'язок задається формулою*

$$u(t,x) = G_1(t,x) * g(x), \quad (t,x) \in \Omega,$$

при цьому $\{G_1(t,\cdot), u(t,\cdot)\} \subset S_{\beta/2}^{\beta/2}$ для всіх $t > 0$.

Доведення. Те, що функція $u(t,x)$ є розв'язком задачі (3.4), (3.10), доведено раніше. Єдиність розв'язку цієї задачі випливає з таких міркувань. Якщо $g = 0$, то $c_k(g) = (g, h_k) = \ 0, \forall k \in \mathbb{Z}_+$; тоді $u(t,x) = 0$ для кожного $t \in (0, +\infty)$, що і доводить єдиність розв'язку задачі (3.4), (3.10).

Доведемо тепер, що розв'язок задачі (3.4), (3.10) неперервно залежить від функції, за допомогою якої задається умова (3.10). Нехай $\{g, g_n, n \geq 1\} \subset L_2(\mathbb{R})$, причому $g_n \to g$ при $n \to \infty$ у просторі $L_2(\mathbb{R})$, тобто $\|g_n - g\| \to 0$ при $n \to \infty$. Це рівносильно тому, що $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k(g_n - g)|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Нехай u_n – розв'язок задачі (3.4), (3.10), який відповідає функції g_n, за допомогою якої задається умова (3.10). Тоді

$$\|u_n - u\|^2 = \|G_1(t,\cdot) * (g_n - g)\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(G_1(t,\cdot))|^2 \cdot |c_k(g_n - g)|^2.$$

Із доведеного раніше випливає, що $|c_k(G_1)| \leq \tilde{c}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, де $\tilde{c} = \Big(\mu - \sum\limits_{p=1}^{m} \mu_p\Big)^{-1} > 0$. Отже,

$$\|u_n - u\|^2 \leq \tilde{c}^2 \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(g_n - g)|^2 \to 0, n \to \infty,$$

що і потрібно було довести. Теорему доведено.

Згортка $G_1(t,\cdot) * g$ має зміст і в тому випадку, коли $g \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})' = G'_{\{\beta\}}(A)$, при цьому $u(t,\cdot) = G_1(t,\cdot) * g \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ при кожному $t \in (0, \infty)$. Доведемо, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (3.4), але умову (3.10), де $g \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, $u(t,x)$ задовольняє у тому розумінні, що

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} u(t,\cdot) = g, \quad g \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})', \quad (3.11)$$

границі розглядаються у просторі $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$.

Лема 3.2. *Функція* $G_1(t,\cdot)$, $t \in (0,\infty)$, *як абстрактна функція параметра* t *зі значеннями в просторі* $S_{\beta/2}^{\beta/2}$, *диференційовна за* t.

Доведення. Виберемо довільне $t \in (0,\infty))$. Оскільки $S_{\beta/2}^{\beta/2} = G_{\{\beta\}}(A) = H_{\{\beta\}} = \bigcup\limits_{\alpha>0} H_{\alpha,\beta}$, де A – гармонійний осцилятор, то для доведення твердження досить довести, що

$$\Phi_{\Delta t}(x) := \frac{1}{\Delta t}[G_1(t+\Delta t,x)-G_1(t,x)] \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}G_1(t,x), \Delta t \to 0,$$

у просторі $H_{\{\beta\}}$ (якщо $\Delta t < 0$, то вважаємо Δt таким, що $t+\Delta t \geq t/2$). Це означає, що:

1) множина функцій $\{\Phi_{\Delta t} : \ |\Delta t| \leq \varepsilon_0, \Delta t \neq 0\}$ ($\varepsilon_0 > 0$ – довільно фіксоване мале число) є обмеженою у просторі $H_{\{\beta\}}$, тобто

$$\exists c > 0 \, \forall \Delta t \ \ (|\Delta t| \leq \varepsilon_0, \Delta t \neq 0) : \|\Phi_{\Delta t}\|^2_{H_{\alpha,\beta}} \leq c$$

для деякого $\alpha > 0$;

2) $\Phi_{\Delta t} \to \dfrac{\partial}{\partial t}G_1(t,\cdot)$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $H_{\{\beta\}}$, тобто

$$\left\|\Phi_{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial t}G_1(t,\cdot)\right\|^2_{H_{\alpha,\beta}} \to 0, \quad \Delta t \to 0.$$

Передусім відзначимо, що функція $G_1(t,\cdot)$ диференційовна за змінною $t \in (0,\infty)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Доведення цієї властивості аналогічне доведенню диференційовності функції, яка задається формулою (3.5); при цьому

$$\frac{\partial G_1(t,x)}{\partial t} = -\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{f(\lambda_k)} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k(x).$$

Оскільки

$$\Phi_{\Delta t}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta t}[Q_1(t+\Delta t,\lambda_k) - Q_1(t,\lambda_k)] Q_2(\lambda_k) h_k(x) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{f(\lambda_k)} Q_1(t+\theta\Delta t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k(x), \quad 0 < \theta < 1,$$

то

$$c_k(\Phi_{\Delta t}) = -\sqrt{f(\lambda_k)} Q_1(t+\theta\Delta t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k)$$

(якщо $\Delta t < 0$, то внаслідок домовленостей відносно Δt маємо, що $t+\theta\Delta t > t+\Delta t \geq t/2$). Тоді для довільно фіксованого $\alpha < t\sqrt{d_0}/2$ (d_0 – стала із нерівності (3.3)) виконуються співвідношення

$$\|\Phi_{\Delta t}\|^2_{H_{\alpha,\beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha\lambda_k^{1/\beta}) |c_k(\Phi_{\Delta t})|^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) \exp(2\alpha\lambda_k^{1/\beta}) \exp(-2(t+\theta\Delta t)\sqrt{f(\lambda_k)}) Q_2^2(\lambda_k) \leq$$

$$\leq (\mu - \tilde{\mu}_0)^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) \exp(2\alpha\lambda_k^{1/\beta}) \exp(-2t\sqrt{f(\lambda_k)}), \tilde{\mu}_0 = \sum_{p=1}^{m} \mu_p.$$

Оскільки

$$f(\lambda_k) \exp(-2t\sqrt{f(\lambda_k)}) \leq \frac{2}{t^2} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) \leq$$

$$\leq \frac{2}{t^2} \exp(-t\sqrt{d_0}\lambda_k^{1/\beta}), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

то

$$\|\Phi_{\Delta t}\|^2_{H_{\alpha,\beta}} \leq \frac{2}{t^2} (\mu - \tilde{\mu}_0)^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-(t\sqrt{d_0} - 2\alpha)\lambda_k^{1/\beta}) < \infty,$$

$$\lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, множина функцій $\{\Phi_{\Delta t} : |\Delta t| \leq \varepsilon_0, \Delta t \neq 0\}$ обмежена у просторі $H_{\{\beta\}}$.

Перевіримо виконання умови 2). Нехай $\Psi_{\Delta t}(x) := \Phi_{\Delta t} - \dfrac{\partial}{\partial t} G_1(t,x)$. Тоді

$$\Psi_{\Delta t}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [Q_1(t,\lambda_k) - Q_1(t+\theta\Delta t,\lambda_k)] Q_2(\lambda_k)\sqrt{f(\lambda_k)} h_k(x).$$

Звідси випливає, що

$$\|\Psi_{\Delta t}\|^2_{H_{\alpha,\beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha\lambda_k^{1/\beta}) |c_k(\Psi_{\Delta t})|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha\lambda_k^{1/\beta}) \times$$

$$\times |\exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) - \exp(-(t+\theta\Delta t)\sqrt{f(\lambda_k)})|^2 Q_2^2(\lambda_k) f(\lambda_k) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha\lambda_k^{1/\beta}) \exp(-2(t+\theta_1\Delta t)\sqrt{f(\lambda_k)}) f^3(\lambda_k)\theta^2 Q_2^2(\lambda_k) \times$$

$$\times (\Delta t)^2 \leq (\mu-\mu_0)^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha\lambda_k^{1/\beta}) \exp(-2t\sqrt{f(\lambda_k)}) \times$$

$$\times f^3(\lambda_k)(\Delta t)^2, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Оскільки $f^3(\lambda_k)\exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) \leq 3!/t^3$ та $\alpha < t\sqrt{d_0}/2$, то

$$\|\Psi_{\Delta t}\|^2_{H_{\alpha,\beta}} \leq 3!(\mu-\mu_0)^{-2} t^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-(t\sqrt{d_0} - 2\alpha)\lambda_k^{1/\beta})(\Delta t)^2.$$

Отже, $\|\Psi_{\Delta t}\|_{H_{\alpha,\beta}} \to 0$ при $\Delta t \to 0$ для довільно-фіксованого $\alpha \in (0, t\sqrt{d_0}/2)$, тобто $\Phi_{\Delta t} \to \dfrac{\partial}{\partial t} G_1(t,\cdot)$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $H_{\{\beta\}} = S_{\beta/2}^{\beta/2}$. Лема доведена.

Аналогічно доводиться диференційовність функції $\dfrac{\partial}{\partial t} G_1(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра $t \in (0,\infty)$ зі значеннями у просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2}$.

Лема 3.3. *Для функції*

$$u(t,x) = G_1(t,x) * g = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k h_k(x), (t,x) \in \Omega, \tag{3.12}$$

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})', \quad c_k = \langle g, h_k \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

правильною є формула $u(t,x) = \langle g, G_{t,x}(\cdot) \rangle$, *де*

$$G_{t,x}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k(x) h_k(y).$$

Доведення. Нехай

$$S_{n,t,x}(y) := \sum_{k=0}^{n} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k(x) h_k(y).$$

Твердження леми випливає з того, що послідовність частинних сум $S_{n,t,x}$ збігається до $G_{t,x}$ при $n \to \infty$ у просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2} = H_{\{\beta\}}$ при фіксованих $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ (для доведення цієї властивості використовуються оцінки функції Ерміта h_k: $|h_k(x)| \leq 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, і функцій $Q_1(t,\lambda_k)$, $Q_2(\lambda_k)$). Справді, внаслідок лінійності і неперервності функціонала g

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) h_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) \langle g, h_k(y) \rangle h_k(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) \langle g, h_k \rangle h_k(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\langle g, \sum_{k=0}^{n} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k(x) h_k(\cdot) \right\rangle =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \langle g, S_{n,t,x}(\cdot)\rangle = \langle g, \lim_{n\to\infty} S_{n,t,x}(\cdot)\rangle = \langle g, G_{t,x}(\cdot)\rangle.$$

Лема 3.4. *Функція $u(t,x)$, яка задається формулою* (3.12), *диференційовна за t, при цьому*

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \left\langle g, \frac{\partial}{\partial t} G_{t,x}(\cdot)\right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} G_1(t,x) * g.$$

Доведення. Із леми 2. випливає, що функція $G_{t,x}$, як абстрактна функція аргумента t зі значеннями у просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2}$, диференційовна за t (при фіксованому $x \in \mathbb{R}$). Отже,

$$\tilde{\Phi}_{\Delta t,t,x}(y) := \frac{1}{\Delta t}[G_{t+\Delta t,x}(y) - G_{t,x}(y)] \to \frac{\partial}{\partial t} G_{t,x}(y)$$

при $\Delta t \to 0$ у просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2}$. Тоді, враховуючи неперервність функціонала g, прийдемо до співвідношень

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}[u(t+\Delta t, x) - u(t,x)] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \left\langle g, \frac{1}{\Delta t}[G_{t+\Delta t,x}(\cdot) - G_{t,x}(\cdot)]\right\rangle =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \langle g, \tilde{\Phi}_{\Delta t,t,x}(\cdot)\rangle = \langle g, \lim_{\Delta t\to 0} \tilde{\Phi}_{\Delta t,t,x}(\cdot)\rangle = \left\langle g, \frac{\partial}{\partial t} G_{t,x}(\cdot)\right\rangle.$$

Той факт, що $\partial u/\partial t$ можна також подати за допомогою згортки $\frac{\partial G_1(t,\cdot)}{\partial t} * g$, доводиться за схемою, яка використовувалася при доведені леми 2.. Лема доведена.

Варто відзначити, що аналогічно доводиться диференційовність за t функції $\partial u/\partial t$, при цьому

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \left\langle g, \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{t,x}(\cdot)\right\rangle = \frac{\partial^2 G_1(t,x)}{\partial t^2} * g.$$

Лема 3.5. *Нехай $u(t,x) = G_1(t,x) * g$, $g \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, $(t,x) \in \Omega$; тоді у просторі $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$ виконується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = g. \tag{3.13}$$

Доведення. Для доведення (3.13) візьмемо довільну функцію

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\psi) h_k(x) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$$

і відмітимо, що внаслідок неперервності вкладання $S_{\beta/2}^{\beta/2}$ у простір $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$ і ортонормованості базису $\{h_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$

$$\langle u(t,\cdot), \psi\rangle = (u(t,\cdot), \psi)_{L_2(\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot)) c_k(\psi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) c_k(\psi),\ \lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$\mu \lim_{t\to+0} \langle u(t,\cdot), \psi\rangle - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \lim_{t\to t_n} \langle u(t,\cdot), \psi\rangle =$$

$$= \mu \lim_{t\to+0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot)) c_k(\psi) - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \lim_{t\to t_n} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot)) c_k(\psi),$$

при цьому ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot)) c_k(\psi)$ збігається рівномірно по $t \in (0,\infty)$. Це випливає із вигляду коефіцієнтів $c_k(u(t,\cdot))$, $k \in \mathbb{Z}_+$, нерівності

$$|c_k(u(t,\cdot))| \cdot |c_k(\psi)| \le \tilde{c} |c_k(g)| \cdot |c_k(\psi)|,\ t \in (0,\infty),\ k \in \mathbb{Z}_+,$$

і тверджень (А), (Б). Отже,

$$\lim_{t\to t_n} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot)) c_k(\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t_n,\cdot)) c_k(\psi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t_n,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) c_k(\psi), \qquad (3.14)$$

$$\lim_{t\to+0}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot))c_k(\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(0,\cdot))c_k(\psi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\psi). \qquad (3.15)$$

Враховуючи (3.14), (3.15), знайдемо, що

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{n=1}^{m}\mu_n \lim_{t\to t_n}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\Big[\Big(\mu - \sum_{n=1}^{m}\mu_n Q_1(t_n,\lambda_k)\Big)\Big] Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\psi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g)c_k(\psi) = \langle g,\psi\rangle,\ \psi\in S_{\beta/2}^{\beta/2},\ g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g)h_k \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})',$$

що і потрібно було довести.

Теорема 3.3. *Нелокальна багатоточкова за часом задача* (3.4), (3.11) *є коректно розв'язною, розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = G_1(t,x) * g = \langle g, G_{t,x}(\cdot)\rangle, \quad (t,x)\in\Omega,$$

$u(t,\cdot)\in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ *для довільного* $t>0$.

Доведення. Із властивостей абстрактної згортки випливає, що $u(t,\cdot)\in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ для довільного $t>0$. Функція $u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, задовольняє рівняння (3.4). Справді,

$$A_f(G_1(t,\cdot) * g) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)c_k(G_1(t,\cdot) * g)h_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)c_k(G_1)c_k(g)h_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(g) Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k.$$

З іншого боку,

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 G_1(t,x)}{\partial t^2} * g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Big(\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} \Big) c_k(g) h_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(g) Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k.$$

Звідси отримуємо, що функція $u(t,x) = G_1(t,x) * g$ є розв'язком рівняння (3.4). Крім того, із леми 5. випливає, що $u(t,x)$ задовольняє (3.11) у вказаному сенсі. Отже, $u(t,x)$ – розв'язок задачі (3.4), (3.11). Єдиність розв'язку випливає із наступних міркувань: якщо $g = 0$, то $c_k(g) = \langle g, h_k \rangle = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$; тоді $u(t,x) = 0$, $t \in (0, +\infty)$.

Як приклад, розглянемо оператор A_f, побудований за функцією $f(\lambda) = \lambda^2$, яка задовольняє умову (3.3) з параметром $\beta = 1$. При цьому рівняння (3.4) має вигляд

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4} - 2x^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + x^4 u(t,x), \quad (t,x) \in \Omega. \tag{3.16}$$

Для рівняння (3.16) задамо двоточкову задачу з параметрами μ, μ_1; $\mu > \mu_1$:

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t, \cdot) - \mu_1 \lim_{t \to t_1} u(t, \cdot) = g, \quad g \in (S_{1/2}^{1/2})', t_1 > 0. \tag{3.17}$$

Внаслідок теореми 3. така задача є коректно розв'язною, розв'язок задається формулою

$$u(t,x) = \langle g, G_{t,x}(\cdot) \rangle, u(t, \cdot) \in S_{1/2}^{1/2}, t > 0,$$

де

$$G_{t,x}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t(2k+1)} (\mu - \mu_1 e^{-t_1(2k+1)})^{-1} h_k(x) h_k(y).$$

Скористаємося тим, що

$$(\mu - \mu_1 e^{-t_1(2k+1)})^{-1} = \mu^{-1}\Big(1 - \frac{\mu_1}{\mu} e^{-t_1(2k+1)}\Big)^{-1} =$$

$$= \mu^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\mu_1}{\mu}\Big)^n e^{-nt_1(2k+1)}, \quad \frac{\mu_1}{\mu} e^{-t_1(2k+1)} < 1, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$G_{t,x}(y) = \mu^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\mu_1}{\mu}\Big)^n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(t+nt_1)(2k+1)} h_k(x) h_k(y).$$

Врахувавши результат, наведений в [22], знаходимо, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(t+nt_1)(2k+1)} h_k(x) h_k(y) =$$

$$= (2\pi \operatorname{sh}(2(t+nt_1)))^{-1/2} \exp\{\operatorname{sh}^{-1}(2(t+nt_1))xy -$$
$$-\frac{1}{2}\operatorname{cth}(2(t+nt_1))(x^2+y^2)\} \equiv K_n(t,x,y).$$

Отже,

$$G_{t,x}(y) = \mu^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\mu_1}{\mu}\Big)^n K_n(t,x,y), \mu_1/\mu < 1.$$

Зокрема, якщо $g = \delta \in (S_{1/2}^{1/2})'$, де δ – дельта-функція Дірака, то розв'язок задачі дається формулою

$$u(t,x) = \langle \delta, G_{t,x}(y) \rangle = G_{t,x}(0) = \mu^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\mu_1}{\mu}\Big)^n K_n(t,x,0).$$

Якщо $\mu = 1$, $\mu_1 = 0$ (випадок задачі Коші), $g = \delta \in (S_{1/2}^{1/2})'$, то

$$u(t,x) = (2\pi \operatorname{sh}(2t))^{-1/2} \exp\Big\{-\frac{1}{2}\operatorname{cth}(2t)x^2\Big\}, \quad (t,x) \in \Omega.$$

Розділ 4. Еволюційні рівняння з оператором Бесселя нескінченного порядку

Досліджуються властивості основних операцій в узагальнених просторах типу $\overset{\circ}{S}$ та просторах узагальнених функцій типу $(\overset{\circ}{S})'$, зокрема властивості перетворення Бесселя основних та узагальнених функцій, згорток, згортувачів та мультиплікаторів. Встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння параболічного типу з оператором Бесселя нескінченного порядку у випадку, коли початкова функція є елементом простору узагальнених функцій типу $(\overset{\circ}{S})'$; досліджені властивості фундаментального розв'язку такої задачі.

4.1. Простори типу $\overset{\circ}{S}$ та $(\overset{\circ}{S})'$

4.1.1. Простори $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$

Символом $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ позначимо сукупність усіх парних функцій з простору $S^{b_n}_{a_k}$, який будується за послідовностями $b_n = n!\rho_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_k = k!d_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ (див. розділ 3, п. 3.1), де $\{\rho_n\}$, $\rho_0 = 1$, – послідовність додатних чисел, яка володіє властивостями:

а) вона монотонно спадна;

б) $\exists c_b > 0\ \exists \gamma_1 \in (0,1)\ \forall n \in \mathbb{N} : \rho_{n-1}/\rho_n \leq c_b \cdot n^{\gamma_1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$;

г) $\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+ :\ \rho_n \geq c_\varepsilon \cdot \varepsilon^n/n^n$.

Послідовність $\{d_k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$ також володіє властивостями а)–г), при цьому умова б) має вигляд: $\exists c_a > 0\ \exists \gamma_2 \in (0,1)$ $\forall n \in \mathbb{N} : d_{k-1}/d_k \leq c_a \cdot k^{\gamma_2}$. Вважаємо також, що $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 1$. Нагадаємо, що прикладом послідовності $\{\rho_n\}$ з властивостями а)–г) може служити послідовність $\rho_n = (n\beta)^{-n\beta}e^{n\beta}$, де $\beta \in (0,1)$ – фіксований параметр.

Оскільки $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ утворює підпростір $S^{b_n}_{a_k}$, то в $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ природним способом вводиться топологія. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором або узагальненим простором типу $\overset{\circ}{S}$, а його елементи – основними функціями.

Сукупність функцій, які є продовженнями функцій з простору $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ в $\mathbb{C}$, позначимо символом $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}(\mathbb{C})$. Із результатів, отриманих в [291] випливає, що простір $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}(\mathbb{C})$ можна подати як об'єднання зліченно-нормованих просторів $\overset{\circ}{S}{}^{b_n,\,B}_{a_k,\,A}(\mathbb{C})$, де $\overset{\circ}{S}{}^{b_n,\,B}_{a_k,\,A}(\mathbb{C})$ складається з тих функцій $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}(\mathbb{C})$, для яких справджується нерівність $|\varphi(x + iy)| \leq \ c\gamma(\bar{a}x)\rho(\bar{b}y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, де $\bar{a}$ – довільна додатна стала, менша за a, $\bar{b}$ – довільна стала, більша за b, $a, b > 0$ – сталі з нерівності, яка характерезує відповідний простір $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}(\mathbb{C})$ (див. розділ 3, п. 3.1), γ та ρ – функції з відповідної нерівності. Якщо для $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n,\,B}_{a_k,\,A}(\mathbb{C})$ покласти

$$\|\varphi\|_{p\omega} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\gamma(a(1-\frac{1}{p})x)\rho((b+\omega)y)},\ p \in \{2, 3, ...\},\ \omega \in \mathbb{N},$$

то ці норми еквівалентні відповідним нормам в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n,\,B}_{a_k,\,A}$.

Отже, послідовність функцій $\{\varphi_\nu(x), \nu \geq 1\} \subset \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}, x \in \mathbb{R}$, збігається до нуля тоді й лише тоді, коли послідовність функцій $\{\varphi_\nu(z), \nu \geq 1\}, z \in \mathbb{C}$, рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини $\mathbb{C}$, при цьому справджуються нерівності

$$\varphi_\nu(z) \leq c\gamma(ax)\rho(by),\ z = x + iy \in \mathbb{C},$$

зі сталими $c, a, b > 0$, не залежними від ν [291].

Мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ є кожна ціла парна функція g, яка задовольняє умову

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0 :\ |g(z)| \leq c_\varepsilon(\gamma(\varepsilon x))^{-1}\rho(\varepsilon y),\ z = x + iy \in \mathbb{C}. \tag{4.1}$$

Прикладом мультиплікатора у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ може служити нормована функція Бесселя j_ν, $\nu > -1/2$, яка є розв'язком рівняння $B_\nu u + \lambda u = 0$, де B_ν – оператор Бесселля; $B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{d}{dx}$, $\nu > -\frac{1}{2}$ – фіксований параметр, за умови, що $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$. Справді, нормована функція Бесселя пов'язана із звичайною функцією Бесселя J_ν, $\nu > -1/2$, першого роду так [291]:

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{x^\nu} J_\nu(x). \tag{4.2}$$

Відомо (див. [297]), що функція J_ν допускає аналітичне продовження в комплексну площину $\mathbb{C}$, при цьому справджується інтегральна формула Пуассона

$$J_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \cos(z\cos t)\sin^{2\nu} t dt. \tag{4.3}$$

Із співвідношень (4.2) та (4.3) випливає, що нормована функція Бесселя j_ν комплексного аргументу z є цілою парною функцією і для j_ν правильним є інтегральне зображення:

$$j_\nu(z) = \frac{2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \cos(z\cos t)\sin^{2\nu} t dt. \tag{4.4}$$

Врахувавши, що $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, за допомогою (4.4) дістаємо оцінку:

$$|j_\nu(z)| \le c_\nu e^{|y|},\ c_\nu = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1/2)},\ \nu > -\frac{1}{2},\ z = x+iy \in \mathbb{C}.$$

Оскільки для довільних опуклих функцій $\ln\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma} = 1/\gamma$ та $\ln\rho$ при довільному $\varepsilon > 0$ правильною є нерівність

$$|y| \le \ln\tilde{\gamma}(\varepsilon x) + \ln\rho(\varepsilon y) + c,\ c > 0,$$

то звідси випливає, що

$$|j_\nu(z)| \leq c_\nu e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon x)+\ln\rho(\varepsilon y)} \equiv c_\nu(\gamma(\varepsilon x))^{-1}\rho(\varepsilon y).$$

Це і означає, що $j_\nu(x)$ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$, $a_k = k!d_k$, $b_n = n!\rho_n$.

Із результатів, наведених в [291] випливає, що в просторах $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ визначені пряме та обернене перетворення Бесселя

$$\psi(\sigma) \equiv F_{B_\nu}[\sigma] = \int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx, \ \sigma \in \mathbb{R},$$

$$\varphi(x) \equiv F_{B_\nu}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)} \int\limits_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, \ x \in \mathbb{R},$$

причому при виконанні умов а)-д) для послідовностей $\{\rho_n\}$ та $\{d_k\}$, має місце формула $F_{B_\nu}\left[\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}\right] = \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}$, при цьому оператор F_{B_ν} є неперервним. Частковим випадком просторів $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ є простори $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$, які складаються з парних функцій з просторів S_α^β; відповідно, правильною є формула $F_{B_\nu}\left[\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta\right] = \overset{\circ}{S}{}_\beta^\alpha$.

Символом T_x^ξ позначимо оператор узагальненого зсуву, який відповідає оператору Бесселя [297]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega}) \cdot \sin^{2\nu}\omega d\omega, \ \varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)), \ \nu > -1/2$.

Лема 4.1. *Операція узагальненого зсуву* $\varphi \to T_x^\xi \varphi$ *визначена і неперервна в просторі* $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$.

Доведення. Для доведення твердження скористаємось співвідношенням $F_B\left[\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}\right] = \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}$. Тоді, врахувавши відомі властивості оператора T_x^ξ (див. [297]), для довільної основної функції φ, маємо:

$$F_{B_\nu}\left[T_x^\xi\varphi\right](\sigma) = \int\limits_0^\infty T_x^\xi\varphi(x)j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty \varphi(x)T_x^\xi j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty \varphi(x)j_\nu(\sigma x)j_\nu(\sigma\xi)x^{2\nu+1}dx = j_\nu(\sigma\xi)F_{B_\nu}[\varphi](\sigma) \equiv \psi_\xi(\sigma).$$

При кожному фіксованому ξ функція $j_\nu(\sigma\xi)$, як функція σ, є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$. Оскільки $F_{B_\nu}[\varphi] \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}$, то $\psi_\xi \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}$ при кожному ξ. Скориставшись оберненим перетворенням Бесселя, знайдемо, що $T_x^\xi\varphi = F_{B_\nu}^{-1}[\psi_\xi] \in \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$, тобто, вказана операція визначена в просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$.

Неперервність операції узагальненого зсуву виливає з властивості неперервності операції прямого і оберненого перетворення Бесселя. Справді, якщо $\{\varphi, \varphi_k, k \geq 1\} \subset \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$, причому $\varphi_k \to \varphi$ при $k \to \infty$ у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$, то

$$F_{B_\nu}\left[T_x^\xi\varphi_k\right] = j_\nu(\sigma\xi)F_{B_\nu}[\varphi_k]\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} j_\nu(\sigma\xi)F_{B_\nu}[\varphi] = F_{B_\nu}\left[T_x^\xi\varphi\right]$$

у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}$. Застосувавши обернене перетворення $F_{B_\nu}^{-1}$, знайдемо, що $T_x^\xi\varphi_k \to T_x^\xi\varphi$ при $k \to \infty$ у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$. Лема доведена.

Лема 4.2. *Операція узугальненого зсуву диференційовна в просторі* $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$.

Доведення. Нехай, за означенням, $\Phi_{\Delta\xi}(x) = \frac{1}{\Delta\xi}\left[T_x^{\xi+\Delta\xi}\varphi - T_x^{\xi}\varphi\right]$, $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$, $\{\xi, \Delta\xi, x\} \subset \mathbb{R}$. Для доведення твердження досить встановити, що граничне співвідношення $\Phi_{\Delta\xi} \to \frac{\partial}{\partial\xi}T_x^{\xi}\varphi$, $\Delta\xi \to 0$, справджується в просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$. Врахувавши властивість неперервності перетворення Бесселя (прямого і оберненого) у просторах $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$, досить встановити, що

$$F_{B_\nu}\left[\Phi_{\Delta\xi}\right] \to F_{B_\nu}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}T_z^{\xi}\varphi\right],\ \Delta\xi \to 0,$$

у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}(\mathbb{C})$, тобто, що: 1) сім'я функцій

$$\{\gamma_{\Delta\xi}(z) := F_{B_\nu}\left[\Phi_{\Delta\xi} - \frac{\partial}{\partial\xi}T_z^{\xi}\varphi\right](\xi),\ |\Delta\xi| \le \varepsilon_0,$$

$\varepsilon_0 > 0$ – фіксоване число, $z = x + iy \in \mathbb{C}\}$ збігається рівномірно до нуля при $\Delta\xi \to 0$ у кожній обмеженій області $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$;

2) $\exists \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} > 0 : |\gamma_{\Delta\xi}(z)| \le \tilde{c}e^{-\ln\tilde{\gamma}_1(\tilde{a}x)+\ln\rho_1(\tilde{b}y)}, \forall z = x+iy \in \mathbb{C}$, де $\tilde{\gamma}_1 = 1/\gamma_1$,

$$\gamma_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} |x| < 1, \\ \inf\limits_k (b_k/|x|^k), & |x| \ge 1, \end{cases}$$

$$\rho_1(y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} |y| < 1, \\ \sup\limits_n (|y|^n/a_n), & |y| \ge 1, \end{cases}$$

сталі $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} > 0$ не залежать від $\Delta\xi$, якщо $\Delta\xi$ досить мала за модулем величина.

Врахувавши, що $F_{B_\nu}\left[T_z^{\xi}\varphi\right] = j_\nu(z\xi)\cdot F_{B_\nu}[\varphi](z)$, прийдемо до співвідношень

$$F_{B_\nu}\left[\Phi_{\Delta\xi}(z)\right] = \frac{1}{\Delta\xi}\left(F_{B_\nu}\left[T_z^{\xi+\Delta\xi}\varphi\right](z) - F_{B_\nu}\left[T_z^{\xi}\varphi\right](z)\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta\xi}\left(j_\nu(z(\xi+\Delta\xi)) - j_\nu(z\xi)\right)\cdot F_{B_\nu}[\varphi](z) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\xi} j_\nu(z(\xi+\theta\Delta\xi)) F_{B_\nu}[\varphi](z),\ 0<\theta<1.$$

Далі скористаємося такими відомими формулами [297]:

$$\frac{\partial}{\partial s} j_\nu(sx) = csx^2 j_{\nu+1}(sx),\ \frac{\partial}{\partial x} j_\nu(sx) = cxs^2 j_{\nu+1}(sx),$$

де стала c залежить лише від ν. Тоді

$$F_{B_\nu}\left[\frac{\partial}{\partial\xi} T_z^\xi \varphi\right](z) = \frac{\partial}{\partial\xi} F_{B_\nu}\left[T_z^\xi\varphi\right](z) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\xi} j_\nu(z\xi) F_{B_\nu}[\varphi](z) = c\xi z^2 j_{\nu+1}(z\xi) F_{B_\nu}[\varphi](z),$$

$$F_{B_\nu}\left[\Phi_{\Delta\xi}\right](z) = c\xi z^2 j_{\nu+1}(z(\xi+\theta\Delta\xi)) F_{B_\nu}[\varphi](z).$$

Отже,

$$\gamma_{\Delta\xi}(z) = c\xi z^2 [j_{\nu+1}(z(\xi+\theta\Delta\xi)) - j_{\nu+1}(z\xi)] F_{B_\nu}[\varphi](z) =$$

$$= c\theta\Delta\xi\cdot\xi\cdot z^2 \frac{\partial}{\partial\xi} j_{\nu+1}(z(\xi+\theta_1\Delta\xi)) F_{B_\nu}[\varphi](z) =$$

$$= cc_1\theta\Delta\xi\cdot\xi^2\cdot z^4 j_{\nu+2}(z(\xi+\theta_1\Delta\xi)) F_B[\varphi](z),\ 0<\theta_1<1$$

(стала c_1 залежить від ν). Із останнього співвідношення випливає, що якщо $z\in\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$, де $\mathbb{K}$ – обмежена область в $\mathbb{C}$, то $\gamma_{\Delta\xi}\to 0$ при $\Delta\xi\to 0$ рівномірно відносно $z\in\mathbb{K}$, оскільки існують додатні сталі $d_1, d_2, d_3 = d_3(\xi)$ такі, що

$$|z^4|\le d_1,\ |F_{B_\nu}[\varphi](z)|\le d_2,\ |j_{\nu+2}(z(\xi+\theta_1\Delta\xi))|\le d_3,\ \forall z\in\mathbb{K}.$$

Таким чином, умова 1) виконується. Доведемо, що умова 2) також має місце.

Передусім зазначимо, що

$$|j_{\nu+2}(z(\xi+\theta_1\Delta\xi))| \le b_\nu e^{|y|\cdot|\xi+\theta_1\Delta\xi|} \le \tilde{b}_\nu e^{c_0|\xi||y|},\ z\in\mathbb{C}.$$

Для опуклих функцій $\ln\tilde{\gamma}_1$ та $\ln\rho_1$ при довільному $\varepsilon > 0$ та фіксованому ξ правильною є нерівність

$$c_0|\xi||y| \le \ln\tilde{\gamma}_1(\varepsilon x) + \ln\rho_1(\varepsilon y) + d, \ d > 0.$$

Тому

$$|j_{\nu+2}(z(\xi + \theta_1\Delta\xi))| \le \tilde{\tilde{b}}_\nu e^{\ln\tilde{\gamma}_1(\varepsilon x) + \ln\rho_1(\varepsilon y)}.$$

Оскільки $F_{B_\nu}[\varphi] \in \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$ і в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$ визначена операція множення на z^2, то $z^4 F_{B_\nu}[\varphi] \in \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$, тобто існують сталі $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} > 0$ такі, що

$$|z^4 F_{B_\nu}[\varphi]| \le \tilde{c} e^{-\ln\tilde{\gamma}_1(\tilde{a}x) + \ln\rho_1(\tilde{b}y)}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Тоді

$$|\gamma_{\Delta\xi}(z)| \le L|\Delta\xi| e^{-\ln\tilde{\gamma}_1(\tilde{a}x) + \ln\tilde{\gamma}_1(\varepsilon x) + \ln\rho_1(\tilde{b}y) + \ln\rho_1(\varepsilon y)}$$

(тут стала $L > 0$ залежить від ν, ξ та не залежить від $\Delta\xi$). Урахувавши нерівності опуклості для функцій $\ln\tilde{\gamma}_1$ та $\ln\rho_1$ і зафіксувавши ε з інтервалу $(0, \tilde{a})$, дістанемо, що

$$-\ln\tilde{\gamma}_1(\tilde{a}x) + \ln\tilde{\gamma}_1(\varepsilon x) \le -\ln\tilde{\gamma}_1((\tilde{a} - \varepsilon)x),$$

$$\ln\rho_1(\tilde{b}y) + \ln\rho_1(\varepsilon y) \le \ln\rho_1((\tilde{b} + \varepsilon)y).$$

Оскільки, за припущенням, $|\Delta\xi| \le \varepsilon_0$, то

$$|\gamma_{\Delta\xi}(z)| \le L\varepsilon_0 e^{-\ln\tilde{\gamma}_1((\tilde{a}-\varepsilon)x) + \ln\rho_1((\tilde{b}+\varepsilon)y)}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Цим доведено, що умова 2) також виконується, тобто, операція узагальненого зсуву диференційовна в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$.

Наслідок 4.1. *Операція узагальненого зсуву нескінченно диференційовна в просторі* $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$.

Для доведення твердження досить скористатися лемою 4.2 та методом математичної індукції.

Лема 4.3. *Правильною є формула*

$$F_{B_\nu}[\varphi * \psi] = F_{B_\nu}[\varphi] \cdot F_{B_\nu}[\psi],\ \forall \{\varphi, \psi\} \subset \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}.$$

Доведення. Використовуючи теорему Фубіні, знаходимо, що

$$F_{B_\nu}[\varphi * \psi](\sigma) = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^{+\infty} T_x^\xi \varphi(x) \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi \right) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \right) \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \varphi(x) T_x^\xi j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \right) \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi.$$

Далі, урахувавши формулу $T_x^\xi j_\nu(\sigma x) = j_\nu(\sigma x) j_\nu(\sigma \xi)$, прийдемо до співвідношення

$$F_{B_\nu}[\varphi * \psi](\sigma) = \int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \cdot \int\limits_0^\infty \psi(\xi) j_\nu(\sigma \xi) \xi^{2\nu+1} d\xi =$$

$$= F_{B_\nu}[\varphi](\sigma) F_{B_\nu}[\psi](\sigma),$$

що й потрібно було довести.

Зазначимо, що в просторах $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ визначена і є неперервною операція множення основних функцій.

Справді, нехай $\{\varphi, \psi\} \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, тоді існують сталі $a_1, b_1, c_1 > 0$ такі, що

$$|\varphi(z)| \leq c_1 e^{-\ln \tilde{\gamma}(a_1 x) + \ln \rho(b_1 y)},\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C};$$

аналогічно, існують сталі a_2, b_2, $c_2 > 0$ такі, що

$$|\psi(z)| \leq c_2 e^{-\ln \tilde{\gamma}(a_2 x) + \ln \rho(b_2 y)},\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Отже,

$$|\varphi(z)\psi(z)| \leq c_1 c_2 e^{-\ln\tilde{\gamma}(a_1 x)+\ln\rho((b_1+b_2)y)},\ \forall z = x+iy \in \mathbb{C},$$

тобто, $\varphi\psi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$.

Врахувавши властивості перетворення Бесселя у просторах типу $\overset{\circ}{S}$, дістаємо, що $F_{B_\nu}[\varphi]\cdot F_{B_\nu}[\psi] \in \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$. Застосувавши обернене перетворення Бесселя, знайдемо, що

$$\varphi * \psi = F^{-1}_{B_\nu}\left[F_{B_\nu}[\varphi]F_{B_\nu}[\psi]\right] \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}.$$

Звідси випливає, що простори $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ утворюють топологічні алгебри відносно згортки основних функцій.

4.1.2. Псевдодиференціальний оператор в просторах типу $\overset{\circ}{S}$

Розглянемо псевдодиференціальний оператор $A_\varphi = F^{-1}_{B_\nu}[\varphi F_{B_\nu}]$, який діє в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$. За умови, що φ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$, оператор A_φ є лінійним і неперервним у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$. Виявляється, якщо розглядати оператор A_φ у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, то його можна розуміти як оператор Бесселя "нескінченного порядку" у такому просторі. Справді, припустимо, що розклад функції φ в ряд Тейлора має вигляд:

$$\varphi(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\sigma^{2k}.$$

Запишемо (поки-що формально) співвідношення

$$F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}\left[\varphi(\sigma)F_{B_{x\to\sigma}}[\psi(x)](\sigma)\right] =$$

$$= F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\sigma^{2k}F_{B_{x\to\sigma}}[\psi(x)](\sigma)\right] =$$

$$= F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(-1)^k F_{B_{x\to\sigma}}[B^k_\nu \psi(x)](\sigma)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(-1)^k F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}\left[F_{B_{x\to\sigma}}\left[B^k_\nu\psi(x)\right](\sigma)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(-1)^k (B^k_\nu\psi)(x) \equiv (A_\varphi\psi)(x), \ \forall\psi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k} \qquad (4.5)$$

(тут ми скористалися тим, що $F_{B_{x\to\sigma}}[B^k_\nu\psi(x)](\sigma) = (-\sigma^2)^k F_{B_{x\to\sigma}}[\psi](\sigma)$). Отже, A_φ у цьому випадку можна розуміти як оператор вигляду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{2k}(-1)^k B^k_\nu$. Таким чином, залишається обґрунтувати коректність проведених в (4.5) перетворень. Для цього досить довести, що

$$r_{n,\psi}(\sigma) := \sum_{k=n+1}^{\infty} c_{2k}\sigma^{2k} F_{B_\nu}[\psi] \to 0$$

при $n \to \infty$ у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, або, що $r_{n,\psi}(s) \to 0$, $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$, при $n \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}(\mathbb{C})$. Іншими словами, потрібно показати, що: 1) $r_{n,\psi} \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}(\mathbb{C})$, $\forall n \geq 1$; 2) послідовність $\{r_{n,\psi}, n \geq 1\}$ рівномірно збігається до нуля при $n \to \infty$ у кожній обмеженій області $Q \subset \mathbb{C}$, при цьому виконуються нерівності $|r_{n,\psi}(s)| \leq c\gamma(a\sigma)\rho(b\tau)$, $\gamma = 1/\rho$, $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, з деякими додатними сталими $a, b, c > 0$, не залежними від n.

Коефіцієнти Тейлора c_{2k}, $k \in \mathbb{Z}_+$, функції φ обчислюються за формулою Коші

$$c_{2k} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{\varphi(s)}{s^{2k+1}} ds,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $s = 0$. Звідси, та з умови (4.1), яку задовольняє функція-символ φ, випливає,

що
$$|c_{2k}| \le c_\varepsilon \inf_R \frac{(\gamma(\varepsilon R))^{-1}}{R^k} \cdot \inf_R \frac{\rho(\varepsilon R)}{R^k},$$
де $\varepsilon > 0$ – довільно фіксоване число. Оскільки в даному випадку $\gamma = 1/\rho$, то
$$|c_{2k}| \le c_\varepsilon \left(\inf_R \frac{\rho(\varepsilon R)}{R^k}\right)^2 = c_\varepsilon \varepsilon^{2k} \left(\inf_R \frac{\rho(\varepsilon R)}{\varepsilon R}\right)^2 = c_\varepsilon \cdot \varepsilon^{2k}\rho_k^2$$
(зауважимо, що функція $\rho(y)y^{-k}$ досягає свого інфімуму на проміжку $(0,+\infty)$; про властивості послідовності $\{\rho_k = \inf\limits_{y>0}(\rho(y)y^{-k})\}$ див. розділ 3, п.3.1). Далі здійснимо оцінку функції $\alpha_{2k}(s) := |s^{2k}F_{B_\nu}[\psi](s)|$, $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$, при фіксованому $k \in \mathbb{N}$.

Оскільки $F_{B_\nu}[\psi](s) \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, то
$$\exists\, c,\, a,\, b > 0\ \forall s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : |F_{B_\nu}[\psi](s)| \le c\gamma(a\sigma)\rho(b\tau),$$
$$\gamma = 1/\rho.$$
Крім того,
$$|s^{2k}| = (\sigma^2 + \tau^2)^k \le (2\max\{\sigma^2, \tau^2\})^k \le 2^k(|\sigma|^{2k} + |\tau|^{2k}).$$
Отже,
$$\alpha_{2k}(s) \le cc_\varepsilon 2^k \varepsilon^{2k}\rho_k^2(|\sigma|^{2k} + |\tau|^{2k})\gamma(a\sigma)\rho(b\tau) =$$
$$= cc_\varepsilon \varepsilon^{2k} 2^k(\rho_k^2|\sigma|^{2k}\gamma(a\sigma)\rho(b\tau) + \rho_k^2|\tau|^{2k}\gamma(a\sigma)\rho(b\tau) \equiv$$
$$\equiv cc_\varepsilon 2^k\varepsilon^{2k}(\Delta_k'(s) + \Delta_k''(s)).$$
Оскільки
$$\rho_k = \inf_{\sigma\ne 0}(\rho(\sigma)/|\sigma|^k) = \inf_{\sigma\ne 0}\left(\rho\left(\frac{a}{4}\sigma\right) / \left|\frac{a}{4}\sigma\right|^k\right),$$
то
$$\rho_k^2|\sigma|^{2k} \le \frac{\rho^2(\frac{a}{4}\sigma)}{|\frac{a}{4}\sigma|^{2k}}|\sigma|^{2k} = \left(\frac{4}{a}\right)^{2k}\rho^2\left(\frac{a}{4}\sigma\right),\ \sigma \ne 0.$$

Функція $\ln \gamma(\sigma)$ задовольняє на $(0, +\infty)$ нерівність (див. розділ 3, п. 3.1):

$$\ln \gamma(\sigma_1) + \ln \gamma(\sigma_2) \geq \ln \gamma(\sigma_1 + \sigma_2),\ \{\sigma_1, \sigma_2\} \subset (0, +\infty),$$

з якої випливає нерівність

$$\gamma\left(\frac{a}{2}\sigma\right) = \gamma\left(\frac{a}{4}\sigma + \frac{a}{4}\sigma\right) \leq \gamma^2\left(\frac{a}{4}\sigma\right). \tag{4.6}$$

Оскільки $\rho = 1/\gamma$, то, урахувавши (4.6), знайдемо, що

$$\Delta_k'(s) = \rho_k^2 |\sigma|^{2k} \gamma(a\sigma)\rho(b\tau) \leq$$

$$\leq \left(\frac{4}{a}\right)^{2k} \rho^2\left(\frac{a}{4}\sigma\right)\gamma\left(\frac{a}{2}\sigma\right)\gamma\left(\frac{a}{2}\sigma\right)\rho\left(b\tau\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{4}{a}\right)^{2k} \frac{\gamma^2\left(\frac{a}{4}\sigma\right)}{\gamma^2\left(\frac{a}{4}\sigma\right)}\gamma\left(\frac{a}{2}\sigma\right)\rho(b\tau) = \left(\frac{4}{a}\right)^{2k}\gamma\left(\frac{a}{2}\sigma\right)\rho(b\tau).$$

Оцінимо $\Delta_k''(s)$. Урахувавши властивості опуклості функції $\ln \rho$ (див. розділ 3, п. 3.1), прийдемо до співвідношень:

$$\Delta_k''(s) = \rho_k^2 \tau^{2k} e^{\ln \rho(b\tau)} \gamma(a\sigma) = \rho_k^2 \tau^{2k} e^{-\ln \rho(\varepsilon_0 \tau)} e^{\ln \rho(b\tau) + \ln \rho(\varepsilon_0 \tau)} \times$$

$$\times \gamma(a\sigma) \leq \rho_k^2 \tau^{2k} e^{-\ln \rho(\varepsilon_0 \tau)} e^{\ln \rho((b+\varepsilon_0)\tau)} \gamma(a\sigma)$$

($\varepsilon_0 > 0$ – довільно фіксоване). Далі скористаємося тим, що

$$\rho_k = \nu_k^{-k} \rho(\nu_k) \leq \nu_k^{-k} e^{k+1},\ k \geq 1,$$

де ν_k – розв'язок рівняння $x\mu(x) = k$, $x \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\mu = \rho'/\rho$, $\mu(2) > 1$ (див. п. 3.1, розділ 3). Справді, оскільки $\ln \rho(y) = \int\limits_0^y \mu(\xi) d\xi$, то внаслідок теореми про середнє значення маємо, що

$$\ln \rho(\nu_k) = \int\limits_0^{\nu_k} \mu(\xi) d\xi = \nu_k \mu(\tilde{\nu}_k) \leq \nu_k \mu(\nu_k) < k+1,\ 0 < \tilde{\nu}_k < \nu_k$$

(тут враховано, що μ – неперервна та монотонно зростаюча на $[0,+\infty)$ функція [291]). Тоді $\rho(\nu_k) \leq e^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Далі безпосередньо знаходимо, що

$$\sup_{\tau \geq 0}(\tau^{2k} \exp\{-\ln \rho(\varepsilon_0 \tau)\}) = \tilde{\tilde{\nu}}_k^{2k} \exp\{-\ln \rho(\varepsilon_0 \tilde{\tilde{\nu}}_k)\} \leq \tilde{\tilde{\nu}}_k^{2k},$$

де $\tilde{\tilde{\nu}}_k$ – розв'язок рівняння $x\mu(x) = 2k$, $x \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що

$$\frac{\tilde{\tilde{\nu}}_k}{\nu_k} = \frac{\tilde{\tilde{\nu}}_k \cdot \mu(\nu_k)}{\nu_k \cdot \mu(\nu_k)} = \frac{\tilde{\tilde{\nu}}_k \cdot \mu(\nu_k)}{k},\ k \geq 1.$$

Оскільки $\nu_k \leq \tilde{\tilde{\nu}}$, а μ – зростаюча та неперервна на $[0,+\infty)$ функція, то $\mu(\nu_k) \leq \mu(\tilde{\tilde{\nu}})$; тоді

$$\frac{\tilde{\tilde{\nu}}_k}{\nu_k} \leq \frac{\tilde{\tilde{\nu}}_k \cdot \mu(\tilde{\tilde{\nu}}_k)}{k} = \frac{2k}{k} = 2,\ k \geq 1,$$

а

$$\Delta_k''(s) \leq e^2 (2e)^{2k} \gamma(a\sigma)\rho((b+\varepsilon_0)\tau).$$

Таким чином,

$$\alpha_{2k}(s) \leq cc_\varepsilon 2^k e^{2k} \left(\left(\frac{4}{a} \right)^{2k} + e^2 (2e)^{2k} \right) \gamma(a_1\sigma)\rho(b_1\tau) =$$

$$= \beta A^k \varepsilon^{2k} \gamma(a_1\sigma)\rho(b_1\tau),$$

де $\beta = 2cc_\varepsilon e^2$, $A = 2\omega^2$, $\omega = \max\left\{\frac{4}{a}, 2e\right\}$, $a_1 = a/2$, $b_1 = b+\varepsilon$, причому всі сталі не залежить від k. Отже,

$$|r_{n,\psi}(s)| \leq \beta \sum_{k=n+1}^{\infty} A^k \varepsilon^{2k} \gamma(a_1\sigma)\rho(b_1\tau),\ s \in \mathbb{C}. \tag{4.7}$$

З нерівності (4.7) випливає, що $r_{n,\psi} \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}(\mathbb{C})$ при кожному $n \in \mathbb{N}$; якщо покласти $\varepsilon = \frac{1}{4A^2}$, то

$|r_{n,\psi}(s)| \leq \frac{1}{2^n}\gamma(a_1\sigma)\rho(b_1\tau)$. Звідси випливає, що послідовність $\{r_{n,\psi}, \, n \geq 1\}$ збігається до нуля при $n \to \infty$ рівномірно в кожній обмеженій області $Q \subset \mathbb{C}$, крім того,

$$|r_{n,\psi}(s)| \leq \gamma(a_1\sigma)\rho(b_1\tau), \, n \in \mathbb{N}, \, s \in \mathbb{C}.$$

Отже, умови 1)-2) виконуються. Цим доведено, що псевдодиференціальний оператор $A_\varphi = F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}[\varphi F_{B_{x\to\sigma}}]$, який діє в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, є оператором Бесселя "нескінченного порядку" вигляду

$$A_\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(-B_\nu)^k.$$

Оператор A_φ є неперервним у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$. Справді, нехай $\{\psi_n, n \geq 1\} \subset \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, $\psi_n \to 0$ при $n \to \infty$ у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$. Тоді $F_{B_\nu}[A_\varphi \psi_n] = \varphi(\sigma) F_{B_\nu}[\psi_n] \to 0$ при $n \to \infty$ у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$. Внаслідок властивості неперервності перетворення Бесселя (прямого і оберненого) у просторах типу $\overset{\circ}{S}$ маємо, що

$$A_\varphi \psi_n = F^{-1}_{B_\nu}[\varphi F_{B_\nu}[\psi_n]] \to 0, \; n \to \infty,$$

у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$.

4.1.3. Простір узагальнених функцій $(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k})'$

Символом $(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k})'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на відповідному просторі основних функцій зі слабкою збіжністю. Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називаються лінійні неперервні функціонали, дія яких на основні функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ визначається формулою

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^\infty f(x)\varphi(x) x^{2\nu+1} dx.$$

Кожна локально інтегровна парна на $\mathbb{R}$ функція, яка задовольняє умову

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R}:\ |f(x)| \le c_\varepsilon(\gamma(\varepsilon x))^{-1}, \tag{4.8}$$

породжує регулярну узагальнену функцію $F_f \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k})'$:

$$\langle F_f, \varphi\rangle = \int\limits_0^\infty f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx,\ \forall\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}.$$

Правильним є наступне твердження: *якщо локально інтегровні парні на $\mathbb{R}$ функції f і g, які задовольняють умову* (4.8), *не співпадають на множині додатної міри Лебега, то існує функція $\varphi_0 \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ така, що $\langle f, \varphi_0\rangle \ne \langle g, \varphi_0\rangle$, тобто $F_f \ne F_g$. Навпаки, якщо $F_f \ne F_g$, то функції f і g не співпадають на множині додатної міри Лебега.* Доведення цього твердження аналогічне доведення відповідної теореми з [298].

Сформульоване твердження дозволяє ототожнювати локально інтегровні функції, які задовольняють умову (4.8) з породжуваними ними узагальненими функціями F_f з простору $(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k})'$. З властивостей інтеграла Лебега випливає, що вкладення

$$\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k} \ni f \to F_f \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k})'$$

є неперервним.

Оскільки в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ визначена операція узагальненого зсуву аргумента, то згортку узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_x^\xi\varphi(x)\rangle = \langle f_\xi, T_\xi^x\varphi(\xi)\rangle$$

(індекс ξ у f_ξ означає, що функціонал f діє на основну функцію $T_x^\xi\varphi(\xi)$ як функцію аргумента ξ).

Лема 4.4. *Нехай* $f \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k})'$, $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$. *Тоді згортка* $f * \varphi$ *є нескінченно диференційовною на* $\mathbb{R}$ *функцією, при цьому справджуються формули*

$$\begin{gathered}(f*\varphi)'(x) = \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial x}(T_x^\xi \varphi(x))\rangle \equiv \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial x}(T_\xi^x \varphi(\xi))\rangle, \\ (f*\varphi)''(x) = \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial x}(T_x^\xi \frac{\partial}{\partial x}(T_x^\xi \varphi(x)))\rangle, \ldots\end{gathered} \tag{4.9}$$

Доведення. Оскільки операція узагальненого зсуву аргумента диференційовна в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, то граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta x}\left[T_\xi^{x+\Delta x}\varphi(\xi) - T_\xi^x \varphi(\xi)\right] \to \frac{\partial}{\partial x} T_\xi^x \varphi(\xi),\ \Delta x \to 0,$$

виконується в сенсі збіжності в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k} \subset S^{b_n}_{a_k}$, а $\frac{\partial}{\partial x} T_\xi^x \varphi(\xi)$, як функція аргумента ξ, належить до простору $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$. Тоді, внаслідок неперервності функціонала f, маємо, що

$$(f*\varphi)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[(f*\varphi)(x+\Delta x) - (f*\varphi)(x)\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \langle f_\xi, \frac{1}{\Delta x}\left[T_\xi^{x+\Delta x}\varphi(\xi) - T_\xi^x \varphi(\xi)\right]\rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[T_\xi^{x+\Delta x}\varphi(\xi) - T_\xi^x \varphi(\xi)\right]\rangle.$$

Однак,

$$T_\xi^{x+\Delta x}\varphi(\xi) = T^\xi_{x+\Delta x}\varphi(x+\Delta x) = T_{\Delta x}\left[T_x^\xi \varphi(x)\right],$$

де $T_{\Delta x} : \varphi(x) \to \varphi(x+\Delta x)$ – оператор зсуву аргумента в просторі $S^{b_n}_{a_k}$. Тому

$$(f*\varphi)'(x) = \langle f_\xi, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{T_{\Delta x}\left[T_x^\xi \varphi(x)\right] - T_x^\xi \varphi(x)}{\Delta x}\rangle.$$

Оскільки

$$\frac{1}{\Delta x}\left[T_{\Delta x}\left[T_x^{\xi}\varphi(x)\right]-T_x^{\xi}\varphi(x)\right]\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}\frac{\partial}{\partial x}T_x^{\xi}\varphi(x)$$

у просторі $S_{a_k}^{b_n}$, то

$$(f*\varphi)'(x)=\langle f_{\xi},\frac{\partial}{\partial x}T_x^{\xi}\varphi(x)\rangle.$$

Інтегруючи одержаний результат, прийдемо до формул (4.9). Лема доведена.

Нехай $f\in(\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n})'$. Якщо $f*\varphi\in\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$, $\forall\varphi\in\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$, і із співвідношення $\varphi_\nu\to 0$ при $\nu\to+\infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ випливає, що $f*\varphi_\nu\to 0$ при $\nu\to\infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$.

Перетворення Бесселя узагальненої функції $f\in(\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n})'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F_{B_\nu}[f],\varphi\rangle=\langle f,F_{B_\nu}[\varphi]\rangle,\ \forall\varphi\in\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}.\qquad(4.10)$$

Із (4.10), властивостей лінійності і неперервності функціонала f та властивостей перетворення Бесселя основних функцій випливає лінійність і неперервність функціонала $F_{B_\nu}[f]$ над простором основних функцій $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}$. Отже, перетворення Бесселя узагальненої функції f, заданої на $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}$, є узагальненою функцією на просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}$.

Теорема 4.1. *Якщо узагальнена функція $f\in(\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n})'$ – згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$, то для довільної функції $\varphi\in\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ правильною є формула*

$$F_{B_\nu}[f*\varphi]=F_{B_\nu}[f]F_{B_\nu}[\varphi].$$

Доведення. Згідно з умовою теореми $f*\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$. Тоді, скориставшись означенням перетворення Бесселя, а також означенням згортки узагальненої функції з основною, запишемо такі співвідношення:

$$\forall \psi \in \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k} : \langle F_{B_\nu}[f*\varphi], \psi \rangle =$$

$$= \langle f*\varphi, F_{B_\nu}[\psi] \rangle = \int_0^\infty (f*\varphi)(x) F_{B_\nu}[\psi](x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \int_0^\infty \langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) \rangle F_{B_\nu}[\psi](x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \langle f_\xi, \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) F_{B_\nu}[\psi](x) x^{2\nu+1} dx \rangle \tag{4.11}$$

(зазначимо, що остання рівність написана, поки-що, формально).

Нехай

$$I(\xi) := \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) F_{B_\nu}[\psi](x) x^{2\nu+1} dx.$$

Тоді

$$I(\xi) = \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) \left(\int_0^{+\infty} \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma \right) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x) \psi(\sigma) T_x^\xi j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} x^{2\nu+1} d\sigma dx =$$

$$= \int_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma \xi) \sigma^{2\nu+1} \left(\int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \right) d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^\infty \psi(\sigma) F_{B_\nu}[\varphi](\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma = F_{B_\nu}[F_{B_\nu}[\varphi] \cdot \psi](\xi)$$

(тут ми скористалися теоремою Фубіні, врахувавши, що збіжним є інтеграл

$$\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty |\psi(\sigma)\varphi(x) j_\nu(\sigma x) j_\nu(\sigma\xi)| \, \sigma^{2\nu+1} x^{2\nu+1} d\sigma \right) dx).$$

Отже,

$$\langle F_{B_\nu}[f * \varphi], \psi \rangle = \langle f, F_{B_\nu}[F_{B_\nu}[\varphi] \cdot \psi] \rangle = \langle F_{B_\nu}[f], F_{B_\nu}[\varphi] \cdot \psi \rangle =$$

$$= \langle F_{B_\nu}[f] \cdot F_{B_\nu}[\varphi], \psi \rangle, \ \forall \psi \in \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}.$$

Звідси випливає рівність

$$F_{B_\nu}[f * \varphi] = F_{B_\nu}[f] \cdot F_{B_\nu}[\varphi].$$

Залишається обґрунтувати коректність співвідношень (4.11). Введемо позначення

$$I_r(\xi) := \int\limits_0^r \psi(\sigma) F_{B_\nu}[\varphi](\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, \ r > 0.$$

Для доведення (4.11) досить показати, що $I_r(\xi) \to I(\xi)$ при $r \to +\infty$ у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, тобто, що $\gamma_r(z) := I(z) - I_r(z) \to 0$, при $r \to +\infty$, $z = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$, за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}(\mathbb{C})$. Врахувавши оцінки нормованої функції j_ν комплексного аргумента, знайдемо, що

$$|\gamma_r(z)| \le \int\limits_r^{+\infty} |\psi(\sigma)||F_{B_\nu}[\varphi](\sigma)||j_\nu(\sigma z)|\sigma^{2\nu+1} d\sigma \le$$

$$\leq c_\nu \int\limits_r^{+\infty} |\psi(\sigma)||F_{B_\nu}[\varphi](\sigma)|e^{\sigma|\omega|}\sigma^{2\nu+1}d\sigma,\ z=\sigma+i\omega\in\mathbb{C}$$

(тут $c_\nu = \sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\nu+1)\cdot\Gamma^{-1}(\nu+1/2), \nu > -1/2$). Якщо $z\in\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$, де $\mathbb{K}$ – обмежена область, то $|\omega|\leq c_0$. Тоді

$$|\gamma_r(z)| \leq c_0 \int\limits_r^{+\infty} |\psi(\sigma)||F_{B_\nu}[\varphi](\sigma)|e^{c_0\sigma}\sigma^{2\nu+1}d\sigma,\ \forall z\in\mathbb{K}.$$

Оскільки $\psi\cdot F_{B_\nu}[\varphi]\in \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$, то інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} |\psi(\sigma)||F_{B_\nu}[\varphi](\sigma)|e^{c_0\sigma}\sigma^{2\nu+1}d\sigma \tag{4.12}$$

є збіжним. Справді, для функції $\psi F_{B_\nu}[\varphi]$ справджується оцінка: $|\psi(\sigma)F_{B_\nu}[\varphi](\sigma)| \leq \tilde{c}\exp\{-\ln\tilde{\gamma}(a_0\sigma)\}$, де $\tilde{c}$, a_0 – деякі додатні сталі. З властивостей функції $\tilde{\gamma}$ випливає, що $\ln\tilde{\gamma}(a_0\sigma)$ зростає швидше за довільну лінійну функцію на проміжку $[1,+\infty)$, тому функція $\sigma^{2\nu+1}\exp\{-\ln\tilde{\gamma}(a_0\sigma)+c_0\sigma\}$ спадає на нескінченності до нуля, наприклад, як функція $\exp\{-\frac{1}{2}\ln\tilde{\gamma}(a_0\sigma)\}$. Звідси і випливає збіжність інтеграла (4.12). Отже,

$$\int\limits_r^{+\infty} |\psi(\sigma)||F_{B_\nu}[\varphi](\sigma)|e^{c_0\sigma}\sigma^{2\nu+1}d\sigma \to 0$$

при $r\to+\infty$ (як залишок збіжного інтеграла). Цим доведено, що $\gamma_r(z)$ збігається до нуля при $r\to+\infty$ рівномірно по z у кожній обмеженій області $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$. Доведемо тепер, що має місце нерівність

$$|\gamma_r(z)| \leq ce^{-\ln\tilde{\gamma}(a\xi)+\ln\rho(b\omega)}, \tag{4.13}$$

де сталі $a,b,c>0$ не залежать від r.

Оскільки $\gamma_r(\xi) = I(\xi) - I_r(\xi)$, то

$$|\gamma_r(\xi)| \leq |I(\xi)| + |I_r(\xi)|.$$

Розглянемо функції

$$I_{r,+}(\xi) = \max_{\xi \in \mathbb{R}}(I_r(\xi), 0),$$

$$I_{r,-}(\xi) \ = -\min_{\xi \in \mathbb{R}}(I_r(\xi), 0),$$

які є невід'ємними і врахуємо те, що

$$|I_r(\xi)| = I_{r,+}(\xi) + I_{r,-}(\xi) \leq 2|I(\xi)|.$$

Отже,

$$|\gamma_r| \leq 3|I| = 3|F_{B_\nu}[F_{B_\nu}[\varphi] \cdot \psi]|, \forall r > 0.$$

Звідси вже випливає нерівність (4.13), оскільки $F_{B_\nu}[F_{B_\nu}[\varphi] \cdot \psi] \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, якщо $\psi \in \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$. Теорема доведена.

Зауваження 4.1. *З теореми 1. випливає, що якщо узагальнена функція f є згортувачем у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, то її перетворення Бесселя – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$.*

Теорема 4.2. *Якщо узагальнена функція f – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, то її перетворення Бесселя – згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$.*

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що

$$F_{B_\nu}[f] * \varphi = \langle F_{B_\nu}[f], T^\xi_x \varphi(x) \rangle = \langle f, F_{B_\nu}[T^\xi_x \varphi(x)] \rangle, \ \forall \varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}.$$

Оскільки $F_{B_\nu}[T^\xi_x \varphi(x)] = j_\nu(\sigma\xi) F_{B_\nu}[\varphi](\sigma)$, то

$$F_{B_\nu}[f] * \varphi = \langle f, j_\nu(\sigma\xi) F_{B_\nu}[\varphi](\sigma) \rangle =$$

$$= \int\limits_0^\infty f(\sigma) j_\nu(\sigma\xi) F_{B_\nu}[\varphi](\sigma)\sigma^{2\nu+1} d\sigma = F_{B_\nu}[f F_{B_\nu}[\varphi]].$$

Зазначимо, що $F_{B_\nu}[f F_{B_\nu}[\varphi]] \in \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$, бо $f F_{B_\nu}[\varphi] \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ (тут враховано, що $F_{B_\nu}[\varphi] \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, а f – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$). Теорема доведена.

Зауваження 4.2. *Результати, одержані в теоремах 1., 2. можна сформулювати так: для того, щоб узагальнена функція $f \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k})'$ була згортувачем у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, необхідно й досить, щоб її перетворення Бесселя було мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$.*

4.2. Властивості фундаментального розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{dt} = A_\varphi u(t,x), \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Pi_T, \tag{4.14}$$

де $A_\varphi = F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}[\varphi(\sigma) F_{B_{x\to\sigma}}]$ – псевдодиференціальний оператор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, побудований за функцією φ, яка є мультиплікатором у просторі і такою, що $e^\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$. У цьому випадку A_φ можна розуміти як оператор Бесселя нескінченного порядку вигляду $(A_\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{2k}(-1)^k B_\nu^k$ (див. п. 4.1.2). Символом $\overset{\circ}{P}{}^{b_n}_{b_k}$ позначимо клас функцій (символів) φ, які задовольняють вказані умови. Для (4.14) поставимо нелокальну багатоточкову задачу: знайти розв'язок рівняння (4.14), який задовольняє умову

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)|_{t=t_1} - \ldots - \mu_m u(t,\cdot)|_{t=t_m} = f, \tag{4.15}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$, $0 < t_1 < \ldots < t_m \leq T$– фіксовані числа, причому $\mu > m \sum\limits_{k=0}^{m} \mu_k$, $f \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$. Розв'язок задачі (4.14), (4.15) шукаємо за допомогою перетворення Бесселя у вигляді $u(t,x) = F^{-1}_{B_\nu}[v(t,\sigma)]\, x$, $(t,x) \in \Pi_T$. Для функції $v : \Pi_T \to \mathbb{R}$ дістаємо задачу з параметром σ :

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} = \varphi(\sigma) v(t,\sigma),\ (t,\sigma) \in \Pi_T, \tag{4.16}$$

$$\mu v(t,\sigma)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k v(t,\sigma)|_{t=t_k} = \tilde{f}(\sigma),\ \sigma \in \mathbb{R}, \tag{4.17}$$

де $\tilde{f}(\sigma) = F_{B_\nu}[f](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (4.16) має вигляд

$$v(t,\sigma) = c \exp\{t\varphi(\sigma)\},\ (t,x) \in \Pi_T \tag{4.18}$$

де $c = c(\sigma)$ визначається з умови (4.17). Підставивши (4.18) в (4.17), знайдемо, що

$$c = \tilde{f}(\sigma) \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k \varphi(\sigma)\} \right)^{-1}.$$

Тоді

$$v(t,\sigma) = \tilde{f}(\sigma) \exp\{t\varphi(\sigma)\} \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k \varphi(\sigma)\} \right)^{-1},$$

$$(t,x) \in \Pi_T.$$

Отже, розв'язок задачі (4.14), (4.15) має вигляд

$$u(t,x) = c_\nu \int\limits_0^\infty v(t,\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma,\ (t,x) \in \Pi_T.$$

Введемо позначення: $G(t,x) = F^{-1}_{B_\nu}[Q(t,\sigma)]$, де

$$Q(t,\sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\}\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{t_k\varphi(\sigma)\}\right)^{-1}.$$

Міркуючи формально, знайдемо, що

$$u(t,x) = \int_0^\infty T_x^\xi G(t,x) f(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = G(t,x)*f(x),\ (t,x)\in\Pi_T.$$

Справді,

$$u(t,x) = c_\nu \int_0^\infty Q(t,\sigma)\left(\int_0^\infty f(\xi) j_\nu(\sigma\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\right) j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma.$$

Оскільки $j_\nu(\sigma\xi)j_\nu(\sigma x) = T_x^\xi j_\nu(\sigma x)$, то

$$u(t,x) = \int_0^\infty \left(c_\nu \int_0^\infty Q(t,\sigma) T_x^\xi j_\nu(\sigma\xi)\sigma^{2\nu+1}d\sigma\right) f(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi =$$

$$= \int_0^\infty T_x^\xi G(t,x) f(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = G(t,x) * f(x),\ (t,x)\in\Pi_T.$$

Коректність проведених тут перетворень випливає з властивостей функції G, які ми наведемо нижче. Властивості функції G пов'язані з властивостями функції Q, оскільки $G = F^{-1}_{B_\nu}[Q]$. Отже, насамперед дослідимо властивості функції $Q(t,\sigma)$ як функції аргумента σ.

Оскільки $\varphi \in \overset{\circ}{P}{}^{b_n}_{b_k}$, то $e^\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$. Тоді (див. п. 4.1) існують числа c_0, a, $b > 0$ такі, що

$$|e^{\varphi(z)}| \le c_0 e^{-\ln\tilde\gamma(a\sigma) + \ln\rho(b\tau)},\ \tilde\gamma = 1/\gamma = \rho,\ z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}. \tag{4.19}$$

Надалі вважатимемо, що стала $c_0 > 0$ в (4.19) задовольняє умову: $c_0 \leq m$, де m – параметр багатоточкової задачі (4.14), (4.15). Тоді

$$|e^{t\varphi(z)}| = |e^{\varphi(z)}|^t \leq [c_0 \exp\{-\ln\tilde{\gamma}(a\sigma) + \ln\rho(b\tau)\}]^t \leq$$

$$\leq c\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma) + t\ln\rho(b\tau)\},\ c = \max\{1, c_0^T\}. \quad (4.20)$$

Лема 4.5. *Нехай* $\varphi \in \overset{\circ}{P}{}^{b_n}_{b_k}$. *Функція*

$$Q(t,s) = \exp\{t\varphi(s)\},\ t \in (0,T],\ s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C},$$

при фіксованому $t \in (0,T]$, *як функція аргумента* s, *належить до простору* $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}(\mathbb{C})$. *Існують сталі* $\tilde{c}, \tilde{a}, \tilde{b} > 0$, *не залежні від* t, *такі, що для її похідних на* $\mathbb{R}$ *правильними є оцінки*

$$|D^n_\sigma Q_1(t,\sigma)| \leq \tilde{c}\tilde{b}^n n! \rho_n \exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(\tilde{a}\sigma)\},\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\rho_n = \inf_\tau (\rho(\tau)/|\tau|^n)$.

Доведення. При фіксованому $t \in (0,1)$ справджується нерівність

$$t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma) \geq \ln\tilde{\gamma}(ta\sigma).$$

Ця властивість випливає із співвідношення

$$\ln\tilde{\gamma}(ta\sigma) = \int_0^{ta\sigma} \mu(\xi)d\xi = t\int_0^{a\sigma} \mu(ty)dy \leq t\int_0^{a\sigma} \mu(y)dy = t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma),$$

де $\mu(\xi) = \tilde{\gamma}'(\xi)/\tilde{\gamma}(\xi)$, при цьому μ – невід'ємна, неперервна на $\mathbb{R}$ функція, монотонно зростаюча на $[0,\infty)$. Тоді

$$-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma) \leq -\ln\tilde{\gamma}(ta\sigma),$$

$$e^{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma) + t\ln\rho(b\tau)} \leq e^{-\ln\tilde{\gamma}(ta\sigma) + \ln\rho(b\tau)} = e^{-\ln\tilde{\gamma}(a_1\sigma) + \ln\rho(b\tau)},$$

$$a_1 = at,\ t \in (0,1).$$

Якщо $t > 1$, то справджується нерівність $t\ln\rho(b\tau) \le \ln\rho(tb\tau)$. Тоді $t = [t] + \{t\}$ і

$$e^{-\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)} = e^{-[t]\ln\gamma(a\sigma)}e^{-\{t\}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)} \le e^{-\{t\}\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)} \le e^{-\ln\tilde{\gamma}(a_2\sigma)},$$

де $a_2 = a\{t\}$,

$$e^{t\ln\rho(b\tau)} \le e^{\ln\rho(tb\tau)} = e^{\ln\rho(b_1\tau)},\ b_1 = bt.$$

Якщо $t = n$, $n \in \mathbb{N}$, то $t = 1 + n - 1$. Тоді

$$e^{-\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)} = e^{-\ln\gamma(a\sigma)}e^{-(n+1)\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)} \le e^{-\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)}.$$

Нехай $\bar{a} = \min\{at, a\{t\}\} = a\{t\}$, якщо t – неціле і $\bar{a} = a$, якщо t – ціле, $\bar{b} = \max\{b, bT\}$. Тоді при фіксованому $t \in (0, T]$ справджується нерівність

$$|Q_1(t,s)| \le ce^{-\ln\tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma)+\ln\rho(\bar{b}\tau)}$$

звідки й випливає, що $Q_1(t,s) \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}(\mathbb{C})$ при кожному $t \in (0, T]$.

У подальших міркуваннях будемо використовувати оцінку

$$|Q_1(t,s)| \le ce^{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)+\ln\rho(\bar{b}\tau)},\ s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}. \qquad (4.21)$$

Внаслідок інтегральної формули Коші

$$D^n_\sigma Q_1(t,\sigma) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{Q_1(t,s)}{(s-\sigma)^{n+1}}ds,\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $\sigma \in \mathbb{R}$. Скориставшись (4.21), прийдемо до нерівностей

$$|D^n_\sigma Q_1(t,\sigma)| \le \frac{n!}{R^n}\max_{s\in\Gamma_R}|Q_1(t,s)| \le \frac{n!}{R^n}e^{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma_0)+\ln\rho(\bar{b}R)},$$

де σ_0 – точка максимуму функції $\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\xi)\}$, $\xi\in[\sigma-R,\ \sigma+R]$. Оскільки $\ln\tilde{\gamma}(a\xi)$ – парна на $\mathbb{R}$ функція, яка зростає на проміжку $[0,+\infty)$, то

$$\sigma_0=\begin{cases}0, & \text{якщо } |\sigma|\le R,\\ \sigma+R, & \text{якщо } \sigma\le -R,\\ \sigma-R, & \text{якщо } \sigma\ge R.\end{cases}$$

Використовуючи нерівність $-\ln\tilde{\gamma}(\sigma_1+\sigma_2)+\ln\tilde{\gamma}(\sigma_1)\le -\ln\tilde{\gamma}(\sigma_2)$, $\sigma_1,\sigma_2>0$, доводимо існування сталих $\tilde{a}$, $a_2>0$, $\tilde{a}\le a$, таких, що

$$\forall\sigma\ge 0,\ \forall R>0:\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma_0)\}\le\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(\tilde{a}\sigma)\times$$

$$\times\exp\{t\ln\tilde{\gamma}(a_2R)\}\le\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\exp\{\ln\tilde{\gamma}(\bar{a}_2R),$$

де $\bar{a}_2=\max\{a_2,a_2T\}$. Тоді

$$|D_\sigma^nQ_1(t,\sigma)|\le\frac{cn!}{R^n}\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(\tilde{a}\sigma)\}\exp\{t\ln\tilde{\gamma}(a_2R)\}\times$$

$$\times\exp\{\ln\rho(\bar{b}R)\}\le\frac{cn!}{R^n}\exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(\tilde{a}\sigma)\}\exp\{\ln\rho(\tilde{b}R)\},$$

$$\tilde{b}=\bar{b}+\bar{a}_2.$$

Тут ми скористалися тим, що $\tilde{\gamma}=\rho$, а також нерівністю опуклості для функції $\ln\rho:\ln\rho(\bar{b}R)+\ln\rho(\bar{a}_2R)\le\ln\rho((\bar{b}+\bar{a}_2)R)$.

Для кожного $n\in\mathbb{Z}_+$ функція $g_{n,t}(R)=R^{-n}\exp\{\ln\rho(\tilde{b}R)\}=R^{-n}\rho(\tilde{b}R)$ є диференційовною на $(0,+\infty)$, причому із властивостей функції ρ випливають співвідношення

$$\lim_{R\to+\infty}g_{n,t}(R)=+\infty,\ n\in\mathbb{Z}_+;\ \lim_{R\to+0}g_{n,t}(R)=\begin{cases}+\infty, & n\in\mathbb{N},\\ 1, & n=0.\end{cases}$$

Оскільки $g_{n,t}(R) > 0,\ R \in (0, +\infty)$, то ця функція досягає свого інфімуму. Отже,

$$|D_\sigma^n Q_1(t,\sigma)| \le cn! \inf_R g_{n,t}(R) \times \exp\{-t \ln \tilde{\gamma}(\tilde{a}\sigma)\} =$$

$$= cn! \tilde{b}^n \inf \frac{\rho(\tilde{b}R)}{(\tilde{b}R)^n} \exp\{-t \ln \tilde{\gamma}(\tilde{a}\sigma)\} = \tilde{c}\tilde{b}^n n! \rho_n \times$$

$$\times \exp\{-t \ln \tilde{\gamma}(\tilde{a}\sigma)\},\ \tilde{c} = c.$$

Лема доведена.

Лема 4.6. *Функція*

$$Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k \varphi(\sigma)\}\right)^{-1} = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k, \sigma)\right)^{-1},$$

$\sigma \in \mathbb{R}$, *– мультиплікатор у просторі* $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$.

Доведення. З урахуванням (4.20), правильними є нерівності

$$Q_1(t_k, \sigma) \le ce^{-t_k \ln \tilde{\gamma}(a\sigma)} \le c,\ k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Оскільки

$$\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k, \sigma) = \mu(1 - \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k \varphi(\sigma)\}),$$

причому

$$\frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k \varphi(\sigma)\} \le \frac{c}{\mu} \sum_{k=1}^m \mu_k < \frac{m}{\mu} \sum_{k=1}^m \mu_k < 1,$$

то, скориставшись поліноміальною формулою, знайдемо, що

$$Q_2(\sigma) = \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k, \sigma)\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-r} \Bigg(\sum_{k=1}^{m} \mu_k e^{t_k \varphi(\sigma)} \Bigg)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1 + \cdots + r_m = r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_m!} \times$$

$$\times \left(\mu_1 e^{t_1 \varphi(\sigma)} \right)^{r_1} \ldots \left(\mu_m e^{t_m \varphi(\sigma)} \right)^{r_m} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1 + \cdots + r_m = r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_m!} \mu_1^{r_1} \ldots \mu_m^{r_m} Q_1(\lambda, \sigma),$$

де $\lambda := t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m, \quad Q_1(\lambda, \sigma) = e^{\lambda \varphi(\sigma)}$. Звідси та з (4.20) випливають нерівності

$$|D_\sigma^n Q_2(\sigma)| \le c \tilde{b}^n n! \rho_n \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1 + \cdots + r_m = r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_m!} \times$$

$$\times \mu_0^r \exp\{-\lambda \ln \tilde{\gamma}(a\sigma)\} \le$$

$$\le c \tilde{b}^n n! \rho_n \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \mu_0^r \sum_{r_1 + \cdots + r_m = r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_m!}, \; n \in \mathbb{N},$$

де $\mu_0 = \max\{\mu_1, \ldots \mu_m\}$. Далі скористаємося формулою

$$\sum_{r_1 + \cdots + r_m = r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_m!} = m^r.$$

Тоді

$$|D_\sigma^n Q_2(\sigma)| \le c \tilde{b}^n n! \rho_n \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}^r = c' \tilde{b}^n n! \rho_n, \; n \in \mathbb{N}, \qquad (4.22)$$

де $\tilde{\mu} = \mu^{-1} \mu_0 m < 1, \; c' = \mu^{-1} \sum\limits_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}^r = \mu^{-1}(1 - \tilde{\mu})^{-1}$. Із останньої нерівності та обмеженості функції Q_2 на $\mathbb{R}$ випливає, що Q_2 – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$. Лема доведена.

Урахувавши (4.21), (4.22) та формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, знайдемо, що

$$|D_\sigma^n Q(t, \sigma)| = \left| \sum_{l=0}^{n} C_n^l D_\sigma^l Q_1(t, \sigma) D_\sigma^{n-l} Q_2(\sigma) \right| \le c c' \sum_{l=0}^{n} C_n^l \times$$

$$\times\tilde{b}^l l!\rho_l\tilde{b}^{n-l}\rho_{n-l}e^{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)} \le c_1 b_1^n n!\rho_n \exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\} \equiv$$

$$\equiv c_1 b_1^n b_n \exp\{-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)\},\ \sigma\in\mathbb{R}, \qquad (4.23)$$

де $c_1 = cc'$, $b_1 = 2\tilde{b}$, $b_n = n!\rho_n$, сталі c_1, $b > 0$ не залежать від t. З останньої нерівності випливає, що функція $Q(t,\sigma)$, як функція змінної σ, є елементом простору $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$ при кожному $t\in(0,T]$.

Урахувавши співвідношення $F^{-1}_{B_\nu}\left[\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}\right] = \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, знайдемо, що $G(t,\cdot) = F^{-1}_{B_\nu}[Q(t,\cdot)] \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$ при кожному $t\in(0,T]$. Виділимо в оцінках похідних функції $G(t,x)$ (за змінною x) залежність від параметра t.

Для цього зазначимо (див. [299]), що функції з простору $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$ задовольняють умову

$$\exists\tilde{c} = c(\varphi) > 0\ \exists\tilde{A} = \tilde{A}(\varphi) > 0\ \exists\tilde{B} = \tilde{B}(\varphi) > 0\ \forall x\in[0,\infty)$$

$$\forall\{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+:\ \ |x^{2k}B^q_\nu\varphi(x)| \le \tilde{c}\tilde{A}^{2k}\tilde{B}^{2q}b_{2k}b_{2q},\ \varphi\in\overset{\circ}{S}{}^{b_q}_{b_k}. \qquad (4.24)$$

Навпаки, якщо нескінченно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція φ задовольняє умову (4.24), то (див. [299]) φ є елементом простору $\overset{\circ}{S}{}^{b_q}_{b_k}$.

Урахувавши це зауваженння, здійснимо оцінку функції $\sigma^{2q}B^k_\nu G(t,\sigma)$, $\sigma\in\ \mathbb{R}$, при фіксованих $\{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+$. Для цього скористаємося співідношенням, встановленим в [299]:

$$\sigma^{2q}B^k_\nu F_{b_\nu}[\varphi](\sigma) = \int\limits_0^\infty B^q_\nu(x^{2k}\varphi(x))j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx,\ \forall\varphi\in\overset{\circ}{S}{}^{b_q}_{b_k},$$

з якого випливає, що

$$\sigma^{2q}B^k_\nu G(t,\sigma) = \int\limits_0^\infty B^q_\nu(x^{2k}Q(t,x))j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx.$$

Зазначимо також, що для функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_q}$ правильною є формула

$$B_\nu^q \varphi(x) = \sum_{i=0}^{q} c_i(\nu) \frac{\varphi^{(2q-i)}(x)}{x^i},\ q \in \mathbb{Z}_+,$$

де $c_i(\nu)$ – коефіцієнти, залежні від ν, функції $\frac{\varphi^{(2q-i)}}{x^i}$, $i \in \{0, 1, ..., q\}$, також є елементом простору $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_q}$. Тоді

$$B_\nu^q(x^{2k}Q(t,x)) = c_0(\nu)(x^{2k}Q(t,x))^{(2q)} + c_1(\nu)\frac{(x^{2k}Q(t,x))^{(2q-1)}}{x} +$$

$$+ c_2(\nu)\frac{(x^{2k}Q(t,x))^{(2q-2)}}{x^2} + ... + c_q(\nu)\frac{(x^{2k}Q(t,x))^{(q)}}{x^q}. \quad (4.25)$$

Зауважимо, що правильною є нерівність

$$\exp\{-t \ln \tilde{\gamma}(a\sigma)\} = \exp\left\{\frac{-t}{2}\ln \tilde{\gamma}(a\sigma)\right\} \cdot \exp\left\{\frac{-t}{2}\ln \tilde{\gamma}(a\sigma)\right\} \leq$$

$$\leq \exp\{-t \ln \tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma)\} \cdot \exp\left\{\frac{-t}{2}\ln \tilde{\gamma}(a\sigma)\right\} =$$

$$= \tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma) \exp\left\{\frac{-t}{2}\ln \tilde{\gamma}(a\sigma)\right\}, \quad (4.26)$$

де $\bar{a} = a\left\{\frac{t}{2}\right\}$, якщо $\frac{t}{2}$ – неціле і $\bar{a} = a$, якщо $\frac{t}{2}$ – ціле (див. доведення леми 5.). Урахувавши (4.26) та (4.23), знайдемо, що крім нерівностей (4.23) справджуються також оцінки

$$\left|x^{2k} D_x^{2q} Q(t,x)\right| \leq c_1 b_1^{2q} b_{2q} \inf_k \frac{b_{2k}}{|\bar{a}x|^{2k}} |x|^{2k} \exp\left\{-\frac{t}{2}\ln \tilde{\gamma}(ax)\right\} \leq$$

$$\leq c_1 a_1^{2k} b_1^{2q} b_{2q} b_{2k} \exp\left\{-\frac{t}{2}\ln \tilde{\gamma}(ax)\right\},\ a_1 = \frac{1}{\bar{a}}. \quad (4.27)$$

Крім того,

$$\exists \tilde{c}_1, A_1, B_1 > 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall \{l, n\} \subset \mathbb{Z}_+$$

$$\left|x^{2l-1}D_x^{2n-1}Q(t,x)\right| = \left|x^{2l-2}(xD_x^{2n-1}Q(t,x))\right| \leq$$
$$\leq \tilde{c}_1(A_1a_1)^{2(l-1)}B_1^{2n}b_{2(l-1)}b_{2n}\exp\left\{\frac{-t}{2}\ln\tilde{\gamma}(ax)\right\}, \qquad (4.28)$$

де $a_1 = \frac{1}{a}$ (тут враховано, що $xD_x^{2n-1}Q(t,x) \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$) при кожному $t>0$. Згідно з формулою Лейбніца диференціювання добутку двох функцій

$$(x^{2k}Q(t,x))^{(2q)} = \sum_{i=0}^{2q} C_{2q}^i (x^{2k})^{(i)} Q^{(2q-i)}(t,x). \qquad (4.29)$$

Подамо праву частину (4.29) у вигляді суми двох доданків

$$I_1 := \sum_{i=0}^{2q} C_{2q}^{2i}(x^{2k})^{(2i)}Q^{(2q-2i)}(t,x),$$

$$I_2 := \sum_{i=0}^{2q} C_{2q}^{2i-1}(x^{2k})^{(2i-1)}Q^{(2q-2i+1)}(t,x).$$

Із умови б) на послідовність $\{\rho_k\}$ (див. п. 4.1.1) випливають оцінки

$$\frac{b_{2k-2}}{b_{2k}} \leq c_b k^{-2(1-\gamma_1)},\ c_b > 0$$

Тоді

$$\frac{b_{2k-2}b_{2q-2}}{b_{2k}b_{2q}} \leq c_b^2\left(\frac{k^{\gamma_1}q^{\gamma_1}}{kq}\right)^2 \leq c_b^2\left(\frac{(\max\{k,q\})^{2\gamma_1}}{kq}\right)^2 \leq$$
$$\leq c_b^2\left(\frac{(k+q)^{2\gamma_1}}{kq}\right)^2 \leq \gamma\left(\frac{k+q}{kq}\right)^2,\ \gamma = c_b^2$$

(тут враховано, що $2\gamma_1 \leq 1$, див. п. 4.1.1). Врахувавши (4.27) та останню нерівність, знайдемо, що

$$|I_1| \leq c_1 a_1^{2k} b_1^{2q} b_{2k} b_{2q}(1+\frac{1}{2!}\prod_{i=0}^{1}(2k-i)(2q-i)\frac{1}{(a_1b_1)^2}\frac{b_{2k-2}b_{2q-2}}{b_{2k}b_{2q}}+$$

$$+\frac{1}{4!}\prod_{i=0}^{3}(2k-i)(2q-i)\frac{1}{(a_1b_1)^4}\cdot\frac{b_{2k-4}b_{2q-4}}{b_{2k-2}b_{2q-2}}\cdot\frac{b_{2k-2}b_{2q-2}}{b_{2k}b_{2q}}+\dots)\times$$

$$\exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(ax)\right\}\leq c_1a_1^{2k}b_1^{2q}b_{2k}b_{2q}(1+\frac{1}{2!}\left(\frac{4\gamma(k+q)}{a_1b_1}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{4!}\left(\frac{4\gamma(k+q)}{a_1b_1}\right)^4+\dots)\exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(ax)\right\}\leq c_1a_1^{2k}b_1^{2q}\times$$

$$\times b_{2k}b_{2q}\,ch\left(\frac{4\gamma(k+q)}{a_1b_1}\right)\exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(ax)\right\}.$$

Аналогічно, з урахуванням (4.28), маємо

$$|I_2|\leq\tilde{c}_1(a_1A_1)^{2k}B_1^{2q}b_{2k}b_{2q}((2k)(2q)\frac{1}{(a_1A_1)^2B_1^0}\frac{b_{2k-2}b_{2q}}{b_{2k}b_{2q}}+$$

$$+\frac{1}{3!}\prod_{i=0}^{2}(2k-i)(2q-i)\frac{1}{(a_1A_1)^4B_1^2}\cdot\frac{b_{2k-4}b_{2q-2}}{b_{2k-2}b_{2q-2}}\cdot\frac{b_{2k-2}b_{2q-2}}{b_{2k}b_{2q}}+\dots)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(ax)\right\}\leq\tilde{c}_1\frac{B_1}{a_1A_1}(a_1A_1)^{2k}B_1^{2q}b_{2k}b_{2q}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{1!}\frac{4\gamma(k+q)}{a_1A_1B_1}+\frac{1}{3!}\left(\frac{4\gamma(k+q)}{(a_1A_1B_1)^3}+\dots\right)\right)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(ax)\right\}\leq\frac{\tilde{c}_1B_1}{a_1A_1}(a_1A_1^{2k}B_1^{2q}b_{2k}b_{2q}\times$$

$$\times\,\mathrm{sh}\left(\frac{4\gamma(k+q)}{a_1A_1B_1}\right)\exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(ax)\right\}.$$

Тоді

$$|I_1|+|I_2|\leq\tilde{c}_0c\tilde{B}_0^{2q}b_{2k}b_{2q}\exp\left\{\frac{4\gamma}{d}(k+q)\right\}\exp\left\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(ax)\right\};$$

де $\tilde{c}_0=\max\{c_1,\frac{\tilde{c}_1B_1}{a_1A_1}\}$, $\tilde{A}_0=\max\{a_1,a_1A_1\}=a_1\cdot\max\{1,A_1\}=\frac{1}{\tilde{a}}\max\{1,A_1\}$, $\tilde{B}_0=\max\{B_1,B_2\}$, $d=$

$\min\{a_1 b_1, a_1 A_1 B_1\} = a_1 \min\{b_1, A_1 B_1\}$.
Оскільки $a_1 = \frac{1}{\bar{a}}$, то $\frac{1}{d} = \bar{a}(\min\{b_1, A_1 B_1\})^{-1} \leq a(\min\{b_1, A_1 B_1\})^{-1} \equiv a \cdot \alpha$. Крім того, можна вважати, що $A \geq 1$, тобто $\tilde{A}_0 = \frac{1}{\bar{a}} A_1$. Отже,

$$|x^{2k} D_x^{2q} Q(t,x)| \leq \tilde{c} \left(\frac{L}{\bar{a}}\right)^{2k} M^{2q} b_{2k} b_{2q} \exp\left\{-\frac{t}{2} \ln \tilde{\gamma}(ax)\right\},$$

$$\{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

де $L = A_1 \exp\{4\gamma\alpha\}$, $M = \tilde{B}_0 \exp\{4\gamma\alpha\}$. Інші доданки в (4.25) оцінюються аналогічним чином. В результаті прийдемо до нерівності

$$|B_\nu^q(x^{2k} Q(t,x))| \leq c_2 \left(\frac{A_2}{\bar{a}}\right)^{2k} B_2^{2q} b_{2k} b_{2q} \exp\left\{-\frac{t}{2} \ln \tilde{\gamma}(ax)\right\} \leq$$

$$\leq c_2 \left(\frac{A_2}{\bar{a}}\right)^{2k} B_2^{2q} b_{2k} b_{2q} \exp\left\{-a_0 t |x|\right\},$$

з деякими сталими c_2, A_2, B_2, $a_0 > 0$, не залежними від t. Отже,

$$|\sigma^{2q} B_\nu^k G(t,\sigma)| = |\int_0^\infty B_\nu^q(x^{2k} Q(t,x)) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx| \leq$$

$$\leq A_\nu \int_0^\infty |B_\nu^q(x^{2k} Q(t,x))| x^{2\nu+1} dx| \leq c_3 \left(\frac{A_2}{\bar{a}}\right)^{2k} \times$$

$$\times B_2^{2q} b_{2k} b_{2q} \int_0^\infty x^{2\nu+1} e^{-a_0 t x} dx =$$

$$= c_4 t^{-2(\nu+1)} \left(\frac{A_2}{\bar{a}}\right)^{2k} B_2^{2q} b_{2k} b_{2q};$$

тут враховано, що $|j_\nu(\sigma x)| \le A_\nu$, $A_\nu = \sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)/\Gamma(\nu+1/2)$, $\{\sigma, x\} \subset \mathbb{R}$. Тоді

$$|B_\nu^k G(t,\sigma)| \le c_4 \left(\frac{A_2}{\bar{a}}\right)^{2k} b_{2k} \cdot t^{-2(\nu+1)} \inf_q \frac{b_{2q}}{(|\sigma| B_2^{-1})^{2q}} =$$

$$= c_4 t^{-2(\nu+1)} \left(\frac{A_2}{\bar{a}}\right)^{2k} b_{2k} \gamma(d_0\sigma) = c_4 t^{-2(\nu+1)} \left(\frac{A_2}{\bar{a}}\right)^{2k} b_{2k} \times$$

$$\times \exp\left\{-\ln \tilde{\gamma}(d_0\sigma)\right\},$$

де $d_0 = B_2^{-1}$, сталі $c_4,\ A_2,\ d_0 > 0$ не залежать від t. Таким чином, правильним є таке твердження.

Лема 4.7. *$G(t,\cdot) \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$ при кожному $t \in (0,T]$. Функція $B_\nu^k G(t,x)$, задовольняє нерівність*

$$\left|B_\nu^k G(t,x)\right| \le L_0 t^{-2(\nu+1)} \left(\frac{A_0}{\bar{a}}\right)^{2k} b_{2k} \exp\left\{-\ln \tilde{\gamma}(d_0 x)\right\},\ k \in \mathbb{Z}_+,$$

сталі $L_0,\ A_0,\ d_0 > 0$ не залежать від t.

Функція $G(t,x)$ диференційовна по t на проміжку $(0,T]$. Справді, оскільки

$$G(t,x) = c_\nu \int_0^{+\infty} Q(t,\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, \tag{4.30}$$

то, формально диференціюючи (4.30) під знаком інтеграла, дістанемо функцію $\Lambda(t,\sigma) := \varphi(\sigma) Q(t,\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1}$. Оскільки φ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall \sigma \in \mathbb{R}:\ |\varphi(\sigma)| \le c_\varepsilon e^{\ln \tilde{\gamma}(\varepsilon\sigma)}.$$

Крім того, з (4.23) випливає оцінка

$$|Q(t,\sigma)| \le c e^{-t_0 \ln \tilde{\gamma}(a\sigma)} \le c e^{-\ln \tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma)},\ \sigma \in [0,+\infty),$$

$$t \in [t_0, T] \subset (0, T],$$

де $\bar{a} = a\{t_0\}$, якщо t_0 – неціле і $\bar{a} = a$, якщо t_0 – ціле. Отже,

$$|\Lambda(t,\sigma)| \le c e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon\sigma) - \ln\tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma)} \sigma^{2\nu+1}, \ \sigma \in [0, +\infty),$$

$$t \in [t_0, T] \subset (0, T].$$

Із нерівності опуклості для функції $\ln\tilde{\gamma}$ випливає, що

$$\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon\sigma) - \ln\tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma) \le -\ln\tilde{\gamma}((\bar{a}-\varepsilon)\sigma) = -\ln\tilde{\gamma}(\bar{\bar{a}}\sigma),$$

$$\bar{\bar{a}} = \bar{a} - \varepsilon = \bar{a}/2 > 0,$$

якщо взяти $\varepsilon = \bar{a}/2$. Оскільки

$$\exists d > 0 \ \forall \sigma \in [0, +\infty): \ \exp\{-\frac{1}{2}\ln\tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma)\}\sigma^{2\nu+1} \le d,$$

то мажорантою для $\Lambda(t,\sigma)$, $t \in [t_0, T]$, $\sigma \in [0, +\infty)$, є інтегровна функція $\exp\{-\frac{t}{2}\ln\tilde{\gamma}(\bar{\bar{a}}\sigma)\}$. Отже, інтеграл від похідної (за змінною t) від підінтегральної функції в (4.30) збігається рівномірно на довільному проміжку $[t_0, T] \subset (0, T]$ і тому похідну по t під знаком інтеграла в (4.30) можна застосовувати в кожній точці $t \in (0, T]$.

Лема 4.8. *Функція $G(t, \cdot)$, $t \in (0, T]$, як абстрактна функція параметра t зі значеннями в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, диференційовна по t.*

Доведення. Із властивості неперевності перетворення Бесселя (прямого і оберненого) у просторах типу $\overset{\circ}{S}$ випливає, що для доведення леми досить встановити, що функція $F_{B_\nu}[G(t, \cdot)] = Q(t, \cdot)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $F_{B_\nu}[\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}] = \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, диференційовна по t. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}\left[Q(t+\Delta t, \sigma) - Q(t, \sigma)\right] \to \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma), \ \ \Delta t \to 0,$$

виконується в тому розумінні, що

1) $D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} D^s_\sigma(\varphi(\sigma)Q(t,\sigma))$, $s \in \mathbb{Z}_+$, рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$;

2) $|D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \bar{c}\bar{B}^s b_s e^{-\ln \tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma)}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, де сталі $\bar{c}, \bar{a}, \bar{b} > 0$ не залежать від Δt, якщо Δt досить мале.

Функція $Q(t,\sigma)$, $(t,\sigma) \in (0,T] \times \mathbb{R}$, диференційовна по t у звичайному розумінні, тому, внаслідок теореми Лагранжа про скінченні прирости,

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = \varphi(\sigma)Q(t+\theta\Delta t, \sigma), \;\; 0 < \theta < 1, \;\; t + \theta\Delta t \leq T.$$

Отже,

$$D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) = \sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_\sigma \varphi(\sigma) D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t, \sigma)$$

і

$$D^s_\sigma \left(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma) \right) = \sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_\sigma \varphi(\sigma) \times$$
$$\times \left[D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t, \sigma) - D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma) \right].$$

Оскільки

$$D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma) = D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t, \sigma)\theta\Delta t,$$
$$0 < \theta_1 < 1,$$

то звідси та з оцінок (4.23) випливає, що

$$D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t \to 0, \; \Delta t \to 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Тоді і

$$D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) \to D^s_\sigma (\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma))$$

при $\Delta t \to 0$ рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Отже, умова 1) виконується.

Оскільки φ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : |\varphi(z)| \le c_\varepsilon e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon\sigma)+\ln\rho(\varepsilon\tau)}, \tag{4.31}$$

$$\tilde{\gamma} = 1/\gamma = \rho.$$

Внаслідок інтегральної формули Коші маємо, що

$$\varphi^{(n)}(\sigma) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{\varphi(z)}{(z-\sigma)^{n+1}}dz,\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $\sigma \in \mathbb{R}$. Тоді, внаслідок (4.31), прийдемо до нерівностей

$$|\varphi^{(n)}(\sigma)| \le \frac{n!}{R^n}\max_{z\in\Gamma_R}|\varphi(z)| \le c_\varepsilon\frac{n!}{R^n}e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma+R))+\ln\rho(\varepsilon R)} \le$$

$$\le c_\varepsilon n!\inf_R\frac{\rho(\varepsilon R)}{R^n}e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma+R))},\ \sigma \ge 0.$$

При достатньо великих значеннях $\sigma > 0$ справджується нерівність $\varepsilon(\sigma + R) \le (\varepsilon + R)\sigma$. Оскільки функція $\ln\tilde{\gamma}$ монотонно зростає для $\sigma \ge 0$, то при цих же значеннях σ

$$\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma + R)) \le \ln\tilde{\gamma}((\varepsilon + R)\sigma).$$

Для всіх значень $\sigma \ge 0$ справджується нерівність

$$\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma + R)) \le \ln\tilde{\gamma}((\varepsilon + R)\sigma) + c_R.$$

Отже, для $\sigma \ge 0$

$$e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon(\sigma+R))} \le \tilde{c}_R e^{\ln\tilde{\gamma}((\varepsilon+R)\sigma)}.$$

Далі, при заданому $\varepsilon > 0$ вважатимемо, що $R = \varepsilon$. Тоді

$$|\varphi^{(n)}(\sigma)| \le \tilde{c}_\varepsilon\varepsilon^n n!\rho_n e^{\ln\tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma)},\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.32}$$

Урахувавши (4.32) та оцінки, які задовольняють похідні функції $Q(t,\sigma)$, знайдемо, що

$$|D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \tilde{\tilde{c}}_\varepsilon \sum_{l=0}^{s} C^l_s \varepsilon^l b_l b_1^{s-l} b_{s-l} e^{\ln\tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma)-(t+\theta\Delta t)\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)} \leq$$

$$\leq \bar{c}\bar{B}^s b_s e^{\ln\tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma)-t\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)} \leq \bar{c}\bar{B}^s b_s e^{\ln\tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma)-\ln\tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma)},$$

тут $\bar{a}=a\{t\}$, якщо t – неціле, $\bar{a}=a$, якщо t – ціле, $\bar{c}=\tilde{\tilde{c}}_\varepsilon$, $\bar{B}=2\max\{\varepsilon,b_1\}$; вважаємо, що $t+\theta\Delta t>0$. Візьмемо $\varepsilon=\bar{a}/4$. Із нерівності опуклості для функції $\ln\tilde{\gamma}$ випливає, що

$$\ln\tilde{\gamma}(2\varepsilon\sigma)-\ln\tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma) \leq -\ln\tilde{\gamma}((\bar{a}-2\varepsilon)\sigma) \equiv -\ln\tilde{\gamma}(\bar{\bar{a}}\sigma),$$

$$\bar{\bar{a}}=\bar{a}-2\varepsilon=a/2>0.$$

Тоді

$$|D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \bar{c}\bar{B}^s b_s e^{-\ln\tilde{\gamma}(\bar{a}\sigma)},\ \sigma\geq 0,$$

причому сталі $\bar{c},\bar{B},\bar{a}>0$ не залежать від Δt (для досить малих значень Δt). Випадок $\sigma<0$ розглядається аналогічно. Лема доведена.

Наслідок 4.2. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f*G(t,x)\right)=f*\frac{\partial G(t,x)}{\partial t},\ \ \forall f\in\left(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}\right)',\ t\in(0,T].$$

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основою маємо, що

$$f*G(t,x)=\langle f_\xi, T^\xi_x G(t,\xi)\rangle=\langle f_\xi, T^x_\xi G(t,\xi)\rangle.$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f*G(t,\cdot)\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[(f*G)(t+\Delta t,x)-(f*G)(t,x)\right]=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}\left[T^\xi_x G(t+\Delta t,x)-T^\xi_x G(t,x)\right]\rangle.$$

Внаслідок леми 8. граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}\left[T_x^\xi G(t+\Delta t, x) - T_x^\xi G(t,x)\right] \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \frac{\partial}{\partial t} T_x^\xi G(t,x)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, тому

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,x)) = \langle f_\xi, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[T_x^\xi G(t+\Delta t, x) - T_x^\xi G(t,x)\right]\rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t} T_x^\xi G(t,x)\rangle = \langle f_\xi, T_x^\xi \frac{\partial}{\partial t} G(t,x)\rangle = f * \frac{\partial}{\partial t} G(t,x),$$

що й потрібно було довести.

Лема 4.9. *У просторі* $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t \to +0} G(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t \to t_l} G(t,\cdot) = \delta. \qquad (4.33)$$

Доведення. Скориставшись властивістю неперервності перетворення Фур'є та функції $G(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, співвідношення (4.33) замінимо граничним співвідношенням

$$\mu \lim_{t \to +0} F_{B_\nu}[G(t,\cdot)] - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t \to t_l} F_{B_\nu}[G(t,\cdot)] = F_{B_\nu}[\delta] \qquad (4.34)$$

у просторі $(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k})'$. Урахувавши зображення функції G, (4.34) подамо у вигляді

$$\mu \lim_{t \to +0} Q(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t \to t_l} Q(t,\cdot) = 1. \qquad (4.35)$$

Для доведення (4.35) візьмемо довільну функцію $\psi \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$ і, скориставшись теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо, що

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle Q(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{l=1}^{m}\mu_l \lim_{t\to t_l}\langle Q(t,\cdot),\psi\rangle =$$

$$= \mu \lim_{t\to+0}\int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma - \sum_{l=1}^{m}\mu_l \lim_{t\to t_l}\int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\times\psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}[\mu Q(0,\sigma) - \sum_{l=1}^{m}\mu_l Q(t_k,\sigma)]\psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\left[\frac{\mu}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)} - \sum_{l=1}^{m}\mu_l\frac{Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)}\right]\times$$

$$\times\psi(\sigma)d\sigma = \int_{\mathbb{R}}\frac{\mu - \sum\limits_{l=1}^{m}\mu_l Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)}\psi(\sigma)d\sigma = \int_{\mathbb{R}}\psi(\sigma)d\sigma = \langle 1,\psi\rangle.$$

Звідси випливає, що співвідношення (4.35) виконується у просторі $(\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n})'$. Отже, правильним є співвідношення (4.33). Лема доведена.

Символом $(\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n},\ *)'$ позначатимемо клас узагальнених функцій з $(\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n})'$, які є згортувачами в просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$.

Наслідок 4.3. *Нехай* $\omega(t,x) = f * G(t,x)$, $f \in (\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n},\ *)'$, $(t,x)\in\Pi_T$. *Тоді в просторі* $(\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n})'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0}\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k}\omega(t,\cdot) = f. \qquad (4.36)$$

Доведення. Оскільки f – згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, то

$$F_{B_\nu}[f * G(t,\cdot)] = F_{B_\nu}[f] \cdot F_{B_\nu}[G(t,\cdot)] = F_{B_\nu}[f] \cdot Q(t,\cdot)$$

(при цьому $F_{B_\nu}[f]$ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$). Урахувавши цей факт та властивість неперервності перетворення Бесселя, співвідношення (4.36) запишемо у вигляді

$$\mu \lim_{t\to+0} F_{B_\nu}[\omega(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} F_{B_\nu}[\omega(t,\cdot)] =$$

$$= F_{B_\nu}[f](\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} Q(t,\cdot)) = F_{B_\nu}[f]$$

(вказане співвідношення розглядається в просторі $(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k})'$). Врахувавши (4.35), прийдемо до (4.36). Твердження доведено.

Функція $\omega(t,\cdot)$ є розв'язком рівняння (4.14). Справді, оскільки f – згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, то

$$A_\varphi u(t,x) = F^{-1}_{B_\nu}[\varphi(\sigma) F_{B_\nu}[f * G(t,\cdot)]] = F^{-1}_{B_\nu}[\varphi(\sigma) F_{B_\nu}[f] Q(t,\sigma)] =$$

$$= F^{-1}_{B_\nu}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma) F_{B_\nu}[f]\right] = F^{-1}_{B_\nu}\left[F_{B_\nu}\left[\frac{\partial}{\partial t} G(t,\cdot)\right] \cdot F_{B_\nu}[f]\right] =$$

$$= F^{-1}_{B_\nu}\left[F_{B_\nu}\left[f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}\right]\right] = f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

З іншого боку (див. наслідок 4.2)

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

Звідси випливає, що функція $\omega(t,\cdot)$ задовольняє (4.14) у звичайному розумінні.

4.3. Коректна розв'язність m-точкової задачі

З наслідку 3. випливає, що для рівняння (4.14) нелокальну m – точкову за часом задачу можна ставити так: знайти розв'язок рівняння (4.14), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f, \;\; f \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}, \, {}_*)', \quad (4.37)$$

де граничне співвідношення (4.37) розглядається в просторі $(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k})'$ (обмеження на параметри $\mu, \;\mu_1, \;\ldots, \;\mu_m$, $t_1, \;\ldots, \;t_m$ такі ж, як у випадку задачі (4.14), (4.15)).

Із доведеного раніше випливає, що функція $u(t,x) = f * G(t,x)$, $f \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}, \, {}_*)'$, є розв'язком рівняння (4.14). Якщо $f = \delta \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}, \, {}_*)'$, то $f * G(t,x) = G(t,x)$, тобто $G(t,\cdot)$ також є розв'язком рівняння (4.14). Урахувавши цей факт, а також співвідношення (4.33), функцію G надалі називатимемо фундаментальним розв'язком задачі (4.14), (4.37).

Теорема 4.3. *Задача* (4.14), (4.37) *коректно розв'язна. Розв'язок дається формулою* $u(t,x) = f * G(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_T$, $u(t,\cdot) \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$ *при кожному* $t \in (0,T]$.

Доведення. Функція $f * G(t,x)$, задовольняє рівняння (4.14). Розв'язок $u(t,x)$ неперервно залежить від функції f в умові (4.37) в тому розумінні, що якщо $\{f, f_n, n \geq 1\} \subset (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}, \, {}_*)'$ і $f_n \to f$ при $n \to \infty$ в просторі $(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k})'$, то $u_n(t,\cdot) = f_n * G(t,\cdot) \to u(t,\cdot) = f * G(t,\cdot)$ при $n \to \infty$ в просторі $(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k})'$. Ця властивість випливає з властивості неперервності згортки.

Залишається переконатися в тому, що задача (4.14), (4.37) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A^*_\varphi v = 0, \;\; (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R}, \;\; 0 \leq t < t_0 \leq T, \quad (4.38)$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = g, \ \ g \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}, {}_*)', \tag{4.39}$$

де A^*_φ – звуження спряженого оператора до оператора A на простір $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k} \subset (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k})'$. Умову (4.39) розуміємо в слабкому сенсі. Задача Коші (4.38), (4.39) розв'язна, при цьому $v(t,\cdot) \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$ при кожному $t \in [0, t_0)$.

Нехай $Q^t_{t_0} : (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}, {}_*)' \to \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$ – оператор, який зіставляє функціоналу $g \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}, {}_*)'$ розв'язок задачі (4.38), (4.39). Оператор $Q^t_{t_0}$ – є лінійним і неперервним, він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 \le T$ і володіє властивостями:

$$\forall g \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}, {}_*)' : \frac{dQ^t_{t_0} g}{dt} + A^*_\varphi Q^t_{t_0} g = 0, \ \lim_{t \to t_0} Q^t_{t_0} g = g$$

(границя розглядається в просторі $(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k})'$).

Розглянемо розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_T$, задачі (4.14), (4.37), який розумітимемо як регулярний функціонал з простору $(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}, {}_*)' \supset \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$. Доведемо, що задача (4.14), (4.37) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}, {}_*)'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (4.14) при нульовій граничній умові (4.37) може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$ (при кожному $t \in (0,T]$). Застосуємо функціонал u до функції $Q^t_{t_0} g \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, де g – довільно фіксований елемент з простору $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k} \subset (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}, {}_*)'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (4.14), (4.38), знайдемо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u, Q^t_{t_0} g\rangle = \langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q^t_{t_0} g\rangle + \langle u, \frac{\partial Q^t_{t_0} g}{\partial t}\rangle = \langle A_\varphi u, Q^t_{t_0} g\rangle -$$

$$-\langle u, A^*_\varphi Q^t_{t_0} g\rangle = \langle A_\varphi u, Q^t_{t_0} g\rangle - \langle A_\varphi u, Q^t_{t_0} g\rangle = 0, \ \ t \in [0, t_0).$$

Звідси випливає, що $\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t g\rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення

$$\lim_{t\to t_0}\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t g\rangle = \langle u(t_0,\cdot), g\rangle = const \equiv c$$

у довільній точці $t_0 \in (0,T]$. Отже, якщо в (4.37) $f=0$, то

$$\mu \lim_{t\to +0}\langle u(t,\cdot), g\rangle - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k}\langle u(t,\cdot), g\rangle = c\left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\right) = 0,$$

тобто $c=0$. Таким чином, $\langle u(t_0,\cdot), g\rangle = 0$ для довільного $g \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$, тобто $u(t_0,x)$ – нульовий функціонал з простору $(\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n},\ {}_*)'$. Оскільки $t_0 \in (0,T]$ і t_0 вибране довільним чином, то $u(t,x)=0$ для всіх $t \in (0,T]$. Теорема доведена.

Як приклад, розглянемо рівняння (4.14) з оператором A_φ, побудованим за функцією $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$. У цьому випадку

$$A_\varphi = B_\nu = \frac{d^2u}{dx^2} + (2\nu+1)^{-1}x^{-1}\frac{d}{dx},\ \nu > -1/2,$$

а рівняння (4.14) – це рівняння з оператором Бесселя

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{\partial u}{\partial x},\ \nu > -\frac{1}{2},\ (t,x)\in \Pi_T. \qquad (4.40)$$

Функція $\varphi(x) = -x^2$ є елементом класу $\overset{\circ}{P}{}_{1/2}^{1/2} \equiv \overset{\circ}{P}{}_{k^{k/2}}^{n^{n/2}} \equiv \overset{\circ}{P}{}_{b_k}^{b^n}$. Справді, $e^{-x^2} \in \overset{\circ}{S}{}_{1/2}^{1/2}$, оскільки

$$|e^{-z^2}| = |e^{-(x+iy)^2}| = e^{-x^2+y^2},\ z = x+iy \in \mathbb{C}. \qquad (4.41)$$

Із характеристики просторів $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$ та (4.41) випливає, що $e^{-x^2} \in \overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$, де $\alpha = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{1-\beta} = 2$, тобто $\beta = \frac{1}{2}$. Крім того, функція $-x^2$, $x \in \mathbb{R}$, – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{1/2}^{1/2}$.

Стала c_0 в нерівності (4.19) у даному випадку рівна одиниці, тобто умова $c_0 \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, виконується. Внаслідок наведеної теореми, нелокальна m-точкова за часом задача для рівняння (4.40) коректно розв'язна, якщо $f \in (\overset{\circ}{S}{}^{1/2}_{1/2,*})'$, при цьому $u(t,x) = f * G(t,x)$, де

$$G(t,x) = 2^{-\nu}\Gamma^{-1}(\nu+1)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^{(r+1)}}\sum_{r_1+\cdots+r_m=r}\frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!}\times$$

$$\times(2\lambda(t,r))^{-(\nu+1)}\exp\{-x^2/(4\lambda(t,r))\},$$

де $\lambda(t,r) = t_1 r_1 + \cdots + t_m r_m + t$. Зокрема, якщо $f = \delta \in (\overset{\circ}{S}{}^{1/2}_{1/2,*})'$, $m = 1$, $t_1 = T$ (випадок двоточкової задачі), то

$$u(t,x) = G(t,x) = 2^{-(2\nu+1)}\mu^{-1}\Gamma^{-1}(\nu+1)\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^r\times$$

$$\times\frac{1}{(t+rT)^{\nu+1}}\exp\left\{\frac{-x^2}{4(t+rT)}\right\}.$$

4.4. Про одну властивість нелокальної за часом задачі для сингулярних параболічних рівнянь

Із властивостей фундаментального розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі (4.14), (4.37) випливає, що розв'язок $u(t,x)$ такої задачі як функція аргумента t при деяких значеннях аргумента x може бути необмеженою функцією: $\lim\limits_{t\to t_0} u(t,x) = +\infty$ (див. приклад далі). Природно постає задача: виділити клас X' узагальнених функцій (початкових функцій) та множину $M \subset \mathbb{R}$ зміни аргумента x такі, що $\sup\limits_{t\in[0,T]}|u(t,x)| \leq c$, $c = c(M) > 0$. У цьому підрозділі знайдемо клас параболічних сингулярних рівнянь та клас фінітних узагальнених функцій, для яких поставлена задача має позитивне рішення.

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{dt} = (-1)^{b-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^b u(t,x), \qquad (4.42)$$

$$(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}_+,$$

де $b \in \mathbb{N}$, $\nu \in \{3/2,\, 5/2,\, 7/2, ...\}$ – фіксовані параметри. Для (4.42) поставимо задачу: знайти розв'язок рівняння (4.42), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f, f \in (\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha})', \qquad (4.43)$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, ..., \mu_m\} \subset (0,T]$, $\{t_1, ..., t_m\} \subset (0,T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > m\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le T$. Співвідношення (4.43) розглядається в просторі $(\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha})'$, тобто (4.43) трактується в тому сенсі, що

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle = \langle f,\psi\rangle,\ \forall\psi \in (\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha})'$$

(конкретні значення параметрів $\alpha, \beta > 0$ вкажемо пізніше).

Символом оператора $A_\varphi = (-1)^{b-1}B_\nu^b$ в (4.42) є функція $\varphi(\sigma) = -\sigma^{2b}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Із результатів, наведених в розділах 3 та 4, випливає, що задача (4.42), (4.43) коректно розв'язна (у вказаному сенсі) за умови, що узагальнена функція f є елементом простору $(\overset{\circ}{S}{}^{1/p}_{1-1/p}, *)$, розв'язок дається формулою

$$u(t,x) = f * G(t,x) = \langle f_\xi, T_\xi^x G(t,\xi)\rangle,$$

де

$$G(t,\xi) = F_{B_\nu}^{-1}[Q(t,\sigma)](\xi), Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma),$$

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\{-t\sigma^{2b}\}, Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k\sigma^{2b}\}\right)^{-1},$$

$\sigma \in \mathbb{R}$, $Q(t,\cdot) \in \overset{\circ}{S}{}^{1-1/p}_{1/p}$, $G(t,\cdot) \in \overset{\circ}{S}{}^{1/p}_{1-1/p}$, $p = 2b$. Безпосередньо переконуємося в тому, що для функції $Q_1(t,\sigma)$ та її похідних (за змінною σ) справджуються оцінки

$$|D^q_\sigma Q_1(t,\sigma)| \leq cB^q t^{1/(2b-1)} q^{q(1-1/(2b))} \exp\{-t\sigma^{2b}\}, \quad (4.44)$$

$$q \in \mathbb{Z}_+,\ t \in (0,1),$$

де сталі c, B, > 0 не залежать від t. Оцінимо похідні функції $Q_2(\sigma)$.

Оскільки $\mu > \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, то

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t\sigma^{2b}\} \leq \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m} \mu_k < 1.$$

Скориставшись поліноміальною формулою, знайдемо, що

$$Q_2(\sigma) = \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-r} \left(\sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k\sigma^{2b}\}\right)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\dots r_m!} \left(\mu_1 \exp\{-t_1\sigma^{2b}\}\right)^{r_1} \dots \times$$

$$\times \left(\mu_r \exp\{-t_m\sigma^{2b}\}\right)^{r_m} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\dots r_m!} \mu_1^{r_1}\dots\mu_m^{r_m} \exp\{-\omega\sigma^{2b}\},$$

де $\omega = t_1r_1 + \dots + t_mr_m$. Тоді

$$D^q_\sigma Q_2(\sigma) = \sum_{r=1}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots r_m=r} \frac{r!}{r_1!\dots r_m!} \mu_1^{r_1}\dots\mu_m^{r_m} D^q_\sigma e^{-\omega\sigma^{2b}}.$$

З урахуванням (4.44) маємо, що

$$|D_\sigma^q e^{-\omega\sigma^{2b}}| \le c_1 B_1^q q^{q(1-1/(2b))} e^{-\omega\sigma^{2b}},\ c_1, B_1 > 0.$$

Зауважимо, що $\omega < t_m r$, $\omega > t_1 r$. Оскільки $0 < t_1 < 1$, а $r \ge 1$, то $\omega > t_1$. Отже, правильною є нерівність

$$|D_\sigma^q e^{-\omega\sigma^{2b}}| \le c_1 B_2^q q^{q(1-1/(2b))} r^q \exp\{-t_1\sigma^{2b}\},$$
$$q \in \mathbb{N}, B_2 = B_1 t_m^{1/(2b)}.$$

Тоді

$$|D_\sigma^q Q_2(\sigma)| \le c_1 \mu^{-1} B_2^q q^{q(1-1/(2b))} \sum_{r=1}^{\infty} \mu^{-r} \mu_0^r r^q \times$$
$$\times \sum_{r_1+\ldots r_m = r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!} \exp\{-t_1\sigma^{2b}\},$$

де $\mu_0 = \max\{\mu_1, ..., \mu_m\}$. Скориставшись формулою

$$\sum_{r_1+\cdots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!} = m^r,$$

знайдемо, що

$$|D_\sigma^q Q_2(\sigma)| \le c_1 \mu^{-1} B_2^q q^{q(1-1/(2b))} \sum_{r=1}^{\infty} \mu^{-r} \mu_0^r r^q \exp\{-t_1\sigma^{2b}\}.$$

Оскільки $\tilde{\mu} = \mu^{-1}\mu_0 m < 1$, то звідси випливає збіжність ряду $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \tilde{\mu}^r r^q = \alpha < +\infty$. Отже,

$$|D_\sigma^q Q_2(\sigma)| \le c_2 B_2^q q^{q(1-1/(2b))} \exp\{-t_1\sigma^{2b}\},\ c_2 = c_1\mu^{-1}\alpha,\ q \in \mathbb{N}. \tag{4.45}$$

Зауважимо, що сама функція Q_2 є обмеженою на $\mathbb{R}$:

$$|Q_2(\sigma)| = Q_2(\sigma) \le (\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k)^{-1}.$$

Із оцінок (4.45) та обмеженості функції Q_2 на $\mathbb{R}$ випливає, що Q_2 – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{1-1/(2b)}_{1/(2b)}$.

Введемо позначення: $\nu = n+1/2$, $n \in \mathbb{N}$, і скористаємося зображенням бесселевих функцій півцілого порядку:

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin(x - \frac{n\pi}{2}) P_n(\frac{1}{x}) + \cos(x - \frac{n\pi}{2}) Q_n(\frac{1}{x}) \right\},$$

$$x > 0,$$

де $P_n(\frac{1}{x})$ – многочлен степеня n відносно $\frac{1}{x}$, $Q_n(\frac{1}{x})$ – многочлен степеня $n-1$; при цьому $P_n(0) = 1$, $Q_n(0) = 0$. Наприклад,

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{x} \cos(x - \frac{\pi}{2}) \right\},$$

$$J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \{ (1 - \frac{3}{x^2}) \sin(x - \pi) + \frac{3}{x} \cos(x - \pi) \}.$$

Оскільки нормована функція Бесселя j_ν пов'язана з функцією Бесселя J_ν формулою (див. [296]) $j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1/2)}{x^\nu} J_\nu(x)$, $x > 0$, то маємо таке зображення функції $j_{n+1/2}$:

$$j_{n+1/2}(x) = \frac{\alpha_n}{x^{n+1/2}} \{ \sin(x - \frac{n\pi}{2}) P_n(\frac{1}{x}) + \cos(x - \frac{n\pi}{2}) Q_n(\frac{1}{x}) \},$$

$$n \in \mathbb{N},\ x > 0.$$

Нехай $P_n(\frac{1}{x}) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x_k}$, $Q_n(\frac{1}{x}) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{d_k}{x_k}, x > 0$,

$$\tilde{G}_{2s}(t,x) = F^{-1}_{B_\nu}[\sigma^{2s} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma)] =$$

$$= c_\nu \int\limits_0^\infty \sigma^{2s} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= \tilde{c}_\nu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma^{2s} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, \ \tilde{c}_\nu = \frac{1}{2} c_\nu,$$

$s \in \mathbb{Z}$ – фіксоване. Урахувавши вигляд нормованої функції Бесселя j_ν, $\nu \in \{3/2, 5/2, ...\}$, знайдемо, що

$$\tilde{G}_{2s}(t,x) = \Psi_1(t,x) + \Psi_2(t,x), \ x \neq 0,$$

де

$$\Psi_1(t,x) = \tilde{\alpha}_n \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x^{n+k+1}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-k+1+2s} \times$$

$$\times \sin(x\sigma - \frac{n\pi}{2}) d\sigma, \ x \neq 0,$$

$$\Psi_2(t,x) = \tilde{\alpha}_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d_k}{x^{n+k+1}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-k+1+2s} \times$$

$$\times \cos(x\sigma - \frac{n\pi}{2}) d\sigma, \ x \neq 0,$$

$$\Psi_1(t,x) = \tilde{\alpha}_n \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x^{n+k+1}} I_{1,k}(t,x),$$

$$I_{1,k}(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-k+1+2s} \sin(x\sigma - \frac{n\pi}{2}) d\sigma, \ x \neq 0,$$

$$\Psi_2(t,x) = \tilde{\alpha}_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d_k}{x^{n+k+1}} I_{2,k}(t,x),$$

$$I_{2,k}(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma) \sigma^{n-k+1+2s} \cos(x\sigma - \frac{n\pi}{2}) d\sigma, \ x \neq 0.$$

Оцінимо $I_{1,k}(t,x), x \neq 0$, зінтегрувавши частинами q разів відповідний інтеграл, де $q = n-k+2+2s+p$, $p \in \mathbb{N}$ – довільно фіксований параметр. У результаті прийдемо до нерівностей

$$|I_{1,k}(t,x)| \leq \frac{1}{|x|^q} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |D_\sigma^q (Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s})| d\sigma \leq$$

$$\leq \frac{1}{|x|^q} [\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |D_\sigma^q Q_1(t,\sigma)||Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s}| d\sigma + ...+$$

$$+C_q^l \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |D_\sigma^{q-l} Q_1(t,\sigma)||D_\sigma^l Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s}| d\sigma + ...+$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_1(t,\sigma)| \cdot |D_\sigma^q Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s}| d\sigma].$$

Зауважимо, що позаінтегральні доданки рівні нулеві, оскільки функція $Q_1(t,\sigma)$ та всі її похідні (за змінною σ) прямують до нуля при $x \to \pm\infty$ (див. (4.44)). Скориставшись ще один раз формулою диференціювання добутку двох функцій та оцінками (4.45), прийдемо до нерівності

$$|D_\sigma^l (Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s})| \leq \sum_{\nu=0}^{l} C_l^\nu |D_\sigma^\nu Q_2(\sigma)||D_\sigma^{l-\nu} \sigma^{n-k+1+2s}| =$$

$$= Q_2(\sigma)|D_\sigma^l \sigma^{n-k+1+2s}| + \sum_{\nu=1}^{l} C_l^\nu |D_\sigma^\nu Q_2(\sigma)||D_\sigma^{l-\nu} \sigma^{n-k+1+2s}| \leq$$

$$\leq Q_2(\sigma)|D_\sigma^l \sigma^{n-k+1+2s}| + c_2 \sum_{\nu=1}^{l} C_l^\nu B_2^\nu \nu^{\nu(1-1/(2b))}(n+1+2s)^{l-\nu}.$$

$$\cdot \sup_{|\sigma|} \left(|\sigma|^{n-k+1+2s} \exp\left\{ -\frac{t_1}{2} |\sigma|^{2b} \right\} \right) \exp\left\{ -\frac{t_1}{2} |\sigma|^{2b} \right\}.$$

Зауважимо, що

$$\sup_{|\sigma|} \left(|\sigma|^{n-k+1+2s} \exp\left\{ -\frac{t_1}{2} |\sigma|^{2b} \right\} \right) \leq$$

$$\leq B_3^{n+1+2s} (n+1+2s)^{(n+1+2s)/(2b)} \leq$$

$$\leq B_4 B_5 s^{2s/(2b)}, \; B_4 = B_4(n) > 0, \; B_5 = B_5(n) > 0.$$

Отже,

$$|D_\sigma^l (Q_2(\sigma) \sigma^{n-k+1+2s})| \leq (\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k)^{-1} |D_\sigma^l \sigma^{n-k+1+2s})| +$$

$$+ L_1 B_5^s s^{2s/(2b)} L_2^l l^{l(1-1/(2b))} \exp\{ -\frac{t_1}{2} |\sigma|^{2b} \}, \tag{4.46}$$

де L_1, B_5, L_2 – додатні сталі. Для проведення подальших досліджень оцінимо інтеграл вигляду

$$\int_0^\infty \sigma^j e^{-t\sigma^{2b}} d\sigma = \int_0^\infty \sigma^j e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}} e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}} d\sigma.$$

Зауважимо, що $\sigma^j \leq j! e^\sigma$, $\sigma \geq 0$; $\sigma \leq \varepsilon \sigma^{2b} + c_1$ для довільного $\varepsilon > 0$ і $c_1 > 1$. Тоді

$$\sigma^j e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}} \leq j! e^{c_1} e^{\varepsilon \sigma^{2b}} e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}} = j! e^{c_1} e^{-\frac{t}{4}\sigma^{2b}},$$

якщо покласти $\varepsilon = t/2$. Далі скористаємося формулою

$$e^{-\frac{t}{4}\sigma^{2b}} = -\int_\sigma^{+\infty} (e^{-\frac{t}{4}y^{2b}})'_y dy = \frac{tb}{2} \int_\sigma^{+\infty} y^{2b-1} e^{-\frac{t}{4}y^{2b}} dy \leq$$

$$\leq \frac{tb}{2} \int_0^{+\infty} y^{2b-1} e^{-\frac{t}{4}\sigma^{2b}} dy.$$

Маємо, що

$$y^{2b-1}e^{-\frac{t}{4}y^{2b}} \le (2b-1)!e^{y}e^{-\frac{t}{4}y^{2b}} \le (2b-1)!e^{c_1}e^{\varepsilon y^{2b}-\frac{t}{4}y^{2b}} =$$

$$= (2b-1)!e^{c_1}e^{-\frac{t}{8}y^{2b}},$$

якщо покласти $\varepsilon = t/8$. Тоді

$$\sigma^{j}e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}} \le j!e^{c_1}\frac{tb}{2}(2b-1)!e^{c_1}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t}{8}y^{2b}}dy \overset{t^{1/(2b)}y=z}{=\!=\!=\!=\!=}$$

$$= \frac{(2b)!}{4}j!e^{2c_1}tt^{-1/(2b)}\int\limits_0^\infty \exp\{-\frac{1}{8}z^{2b}\}dz = \alpha t^{1-1/(2b)}.$$

Отже,

$$\int\limits_0^\infty \sigma^{j}e^{-t\sigma^{2b}}d\sigma \le \alpha t^{1-1/(2b)}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t}{2}\sigma^{2b}}d\sigma =$$

$$= \alpha_1 t^{1-1/(2b)}t^{-1/(2b)} = \alpha_1 t^{1-1/(2b)} \le \alpha_1 \qquad (4.47)$$

для $t \in (0,1)$ $(1-1/(2b) \ge 0$, оскільки $b \ge 1)$. З урахуванням (4.44), (4.46), (4.47) прийдемо до нерівностей

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |D_\sigma^{q-l}Q_1(t,\sigma)| \cdot |D_\sigma^{l}(Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s})|d\sigma \le$$

$$\le \alpha_0 L_3 t^{1-1/(2b)}B_5^s s^{2s/(2b)}B_6^q q^{q(1-1/(2b))}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\frac{t_1^2}{2}|\sigma|^{2b}\}d\sigma \le$$

$$\le \alpha_1 B_5^s s^{2s/(2b)}B_6^q q^{q(1-1/(2b))}t^{1-1/(2b)},\ 1 \le l \le q,\ t \in (0,1).$$

Окремо оцінимо інтеграл

$$I := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |D_\sigma^{q}Q_1(t,\sigma)||Q_2(\sigma)\sigma^{n-k+1+2s}|d\sigma,$$

оскільки в цьому випадку $Q_2(\sigma)$ є лише обмеженою на $\mathbb{R}$ функцією. Для цього в оцінках (4.44) похідних функції $Q_1(t,\sigma)$ врахуємо множник $t^{q/(2b)}$, оскільки тут $q \geq 1$. Тоді

$$I \leq c\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\right)^{-1} t^{q/(2b)} q^{q(1-1/(2b))} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma|^{n-k+1+2s} \exp\{-t|\sigma|^{2b}\} \overset{t^{1/(2b)}\sigma=y}{=\!=\!=\!=}$$

$$= \tilde{c}B^q t^{q/(2b)} q^{q(1-1/(2b))} t^{-1/(2b)} t^{-(n-k+1+2s)/(2b)} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{n-k+1+2s} \exp\{-|y|^{2b}\} dy.$$

Нагадаємо, що $q = n - k + 2 + 2s + p$, $p \in \mathbb{N}$, тому $t^{q/(2b)} t^{-(n-k+2+2s)/(2b)} = t^{p/(2b)} \leq 1$, $t \in (0,1)$. Крім того,

$$\Lambda := \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{n-k+1+2s} \exp\{-|y|^{2b}\} dy \leq$$

$$\leq 2 \sup_{y \geq 0} \left(y^{n-k+1+2s} \exp\left\{-\frac{1}{2} y^{2b}\right\}\right) \int_{0}^{+\infty} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2} y^{2b}\right\} dy.$$

Урахувавши співвідношення

$$\sup_{y \geq 0} \left(y^m \exp\left\{-\frac{1}{2} y^{2b}\right\}\right) \leq \left(\frac{2m}{b}\right)^{m/(2b)} e^{-m/b},$$

$$m = n - k + 1 + 2s \leq n + 1 + 2s,$$

знайдемо, що $\Lambda \leq F_1 F_2^s s^{2s/(2b)}$, де $F_1 = F_1(n) > 0$, $F_2 = F_2(n) > 0$. Тоді $I \leq \tilde{F}_1 \tilde{F}_2^s s^{2s/(2b)} F_3^q q^{q(1-1/(2b))}$. Урахувавши всі ці нерівності, прийдемо до оцінки

$$|I_{1,k}(t,x)| \leq \beta_1 |x|^{-q} \beta_2^s \beta_3^q s^{2s/(2b)} q^{q(1-1/(2b))},\ t \in (0,1),\ x \neq 0, \tag{4.48}$$

$q = n-k+2+2s+p$, $p \in \mathbb{N}$ – довільно фіксоване. Нерівністю (4.48) скористаємося при оцінюванні $|\Psi_1(t,x)|$:

$$|\Psi_1(t,x)| \leq \tilde{\beta}_1 |x|^{-2(\nu+1)-2s-p} \tilde{\beta}_2^s \tilde{\beta}_3^p s^{2s/(2b)} s^{2s/(1-1/(2b))} p^{p(1-1/(2b))} =$$

$$= \tilde{\beta}_1 |x|^{-2(\nu+1)-2s-p} \tilde{\beta}_2^s \tilde{\beta}_3^p s^{2s} p^{p(1-1/(2b))},\ t \in (0,1), x \neq 0.$$

Функція $\Psi_2(t,x)$, $x \neq 0$, оцінюється аналогічно. Підсумуємо отримані результати у вигляді наступного твердження.

Лема 4.10. *Функція $\tilde{G}_{2s}(t,x)$, $x \neq 0$, $t \in (0,1)$, задовольняє нерівність*

$$|\tilde{G}_{2s}(t,x)| \leq M_1 |x|^{-2(\nu+1)-2s-p} M_1^s M_2^p s^{2s} p^{p(1-1/(2b))}, s \in \mathbb{Z}_+ \tag{4.49}$$

де сталі $M_1, M_2, M_3 > 0$ не залежать від t, $p \in \mathbb{N}$ – довільно фіксований параметр.

Наслідок 4.4. *Якщо $|x-\xi| \geq a_0 > 0$, $x \geq 0$, $\xi \geq 0$, то правильними є оцінки*

$$|B_{\nu,\xi}^s T_\xi^x G(t,\xi)| \leq L_0 |x-\xi|^{-2(\nu+1)-2s-p} L_1^s L_2^p s^{2s} p^{p(1-1/(2b))}, \tag{4.50}$$

$t \in (0,1), s \in \mathbb{Z}_+$, де сталі $L_0, L_1, L_2 > 0$ не залежать від t, $p \in \mathbb{N}$ – довільно фіксований параметр.

Доведення. Згідно з властивостями операторів Бесселя та узагальненого зсуву маємо

$$B_{\nu,\xi}^s T_\xi^x F_{B_\nu}[\varphi](\xi) = T_\xi^x \Big(\int_0^\infty \varphi(\sigma)(-\sigma^2)^s j_\nu(\sigma\xi)\sigma^{2\nu+1} d\sigma\Big) =$$

$$= (-1)^s T_\xi^x F_{B_\nu}[\sigma^{2s}\varphi(\sigma)](\xi).$$

Тоді

$$B^s_{\nu,\xi}T^x_\xi G(t,\xi) = (-1)^s T^x_\xi F^{-1}_{B_\nu}[\sigma^{2s}Q(t,\sigma)] =$$

$$= (-1)^s T^x_\xi \tilde{G}_{2s}(t,\xi),\ Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma).$$

Зауважимо, що

$$T^x_\xi \tilde{G}_{2s}(t,\xi) = c_\nu T^x_\xi (\int\limits_0^\infty \sigma^{2s}Q(t,\sigma)j_\nu(\sigma\xi)\sigma^{2\nu+1}d\sigma) =$$

$$= c_\nu b_\nu \int\limits_0^\pi (\int\limits_0^\infty \sigma^{2s}Q(t,\sigma)j_\nu(\sigma\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega})\sigma^{2\nu+1}d\sigma)\times$$

$$\times \sin^{2\nu}\omega d\omega.$$

Оцінку інтеграла

$$\int\limits_0^\infty \sigma^{2s}Q(t,\sigma)j_\nu(\sigma\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega})\sigma^{2\nu+1}d\sigma$$

здійснюємо за схемою оцінювання функції $F^{-1}_{B_\nu}[\sigma^{2s}Q(t,\,\sigma)] = \tilde{G}_{2s}(t,\,\xi)$, $\xi \neq 0$. Урахувавши (4.49), а також нерівність $\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega} \geq |x-\xi|$, $x \geq 0$, $\xi \geq 0$, $\omega \in [0,\pi]$, прийдемо до оцінки (4.50).

Зауваження 4.3. *Якщо парна нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція задовольняє умову*

$$\exists\, c, A, B > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall\{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$

$$|x^{2k}\varphi^{(2q)}(x)| \leq cA^kB^qk^{2k\alpha}q^{2q\beta} \tag{A}$$

(сталі $c, A, B > 0$ залежать від функції φ), то

$$\exists\, c_1, A_1, B_1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall\{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$

$$|x^{2k}B^q_\nu\varphi(x)| \leq c_1A_1^kB_1^qk^{2k\alpha}q^{2q\beta} \tag{Б}$$

і навпаки. Отже, кожна функція $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$ *задовольняє умову (А) та умову (Б).*

Із наслідку 4.4 та умов (А), (Б) випливає, що правильною є нерівність

$$|D_{\xi}^{2s} T_{\xi}^{x} G(t,\xi)| \le \tilde{L}_0 |x-\xi|^{-2(\nu+1)-2s-p} \tilde{L}_1^s \tilde{L}_2^p s^{2s} p^{p(1-1/(2b))} \tag{4.51}$$

з деякими сталими $\tilde{L}_0, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2 > 0$*, не залежними від* t*, якщо* $|x-\xi| \ge a_0 > 0$*, де* $p \in \mathbb{N}$ *– довільно фіксований параметр.*

Нехай узагальнена функція f в умові (4.43) є елементом простору $(\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)})' \subset (S^{1/(2b)}_{1-1/(2b)})', \beta > 1$. Оскільки в основному просторі $S^{\beta}_{1-1/(2b)}$ при $\beta > 1$ є фінітні функції [22], то в просторі $(S^{\beta}_{1-1/(2b)})', \beta > 1$, є фінітні узагальнені функції, тобто функції, носіями яких є обмежені множини. Зазначимо, що кожна фінітна узагальнена функція є згортувачем у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}, \beta > 1$. Ця властивість випливає із загального результату, який відноситься до теорії досконалих просторів (див. [22]): якщо Φ – досконалий простір із диференційовною операцією зсуву, то кожний фінітний функціонал є згортувачем у просторі Φ. Відповідно, якщо $\overset{\circ}{\Phi}$ – досконалий простір, який складається з парних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій з диференційовною операцією узагальненого зсуву аргумента, то кожна фінітна узагальнена функція з простору $(\overset{\circ}{\Phi})'$ є згортувачем у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$. Фінітні узагальнені функції утворюють досить широкий клас; зокрема, кожна обмежена замкнена множина $F \subset \mathbb{R}$ є носієм деякої узагальненої фінітної функції.

Теорема 4.4. *Нехай* $u(t,x)$ *– розв'язок задачі* (4.42), (4.43) *з функцією* f *в умові* (4.43), *яка є елементом простору* $(\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)})' \subset (S^{1/(2b)}_{1-1/(2b)})', \beta > 1$, *suppf – обмежена* *множина в* $\mathbb{R}$, $[c,d]\cap supp f=\emptyset$. *Тоді*

$$\exists\alpha>0: \sup_{t\in[0,T]}|u(t,x)|\le\alpha,\ \alpha=\alpha(c,d),\ x\in[c,d].$$

Доведення. Нехай $[c,d]\subset[a_1,b_1]\subset(a,b)$, $(a,b)\cap supp\ f=\emptyset$. Розглянемо функцію $\psi\in\ \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}$ таку, що $\psi(x)=1$ для $x\in[a_1,b_1]$, $supp\ \psi\subset(a,b)$. Така функція існує, оскільки простір $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}$ містить фінітні функції при $\beta>1$. Функції $\psi(\xi)T^x_\xi G(t,\xi)$, $(1-\psi(\xi))T^x_\xi G(t,\xi)$, як функції ξ, є елементами простору $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}$ при кожному $t\in(0,T]$ і $x\in\mathbb{R}$, тому правильним є співвідношення

$$u(t,x)=\langle f_\xi,\psi(\xi)T^x_\xi G(t,\xi)\rangle+\langle f_\xi,\eta(\xi)T^x_\xi G(t,\xi)\rangle,$$

де $\eta=1-\psi$. Перший доданок у цій рівності рівний нулю, оскільки $supp\ f\cap supp\ (\psi(\xi)T^x_\xi G(t,\xi))=\emptyset$. Отже, $u(t,x)=\langle f_\xi,\eta(\xi)T^x_\xi G(t,\xi)\rangle$. Оскільки $f\in(\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)})'=\bigcap\limits_{A,B>0}(\overset{\circ}{S}{}^{\beta,B}_{1-1/(2b),A})'$ і в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}$ виконується перша аксіома зліченності [22], то функціонал f є неперервним тоді й лише тоді, коли він обмежений на кожній обмеженій множині з простору $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}$. Отже, для доведення теореми досить показати, що сім'я функцій $\Phi_{t,x}(\xi)=\eta(\xi)T^x_\xi G(t,x)$ обмежена в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}$ рівномірно по t, для досить малих значень t, і $x\in[c,d]$, тобто, що

$$|\xi^{2k}D^{2s}_\xi\Phi_{t,x}(\xi)|\le cA^kB^sk^{2k(1-1/(2b))}s^{2\beta s},\ \{k,s\}\subset\mathbb{Z}_+,\ \xi\in\mathbb{R}, \tag{4.52}$$

де сталі c, A, $B>0$ не залежать від t, x, ξ, які змінюються вказаним способом. Оскільки $\Phi_{t,x}(\xi)=0$ для $\xi\in[a_1,b_1]$, то оцінку (4.52) досить встановити для $\xi\in\mathbb{R}\setminus[a_1,b_1]$.

Функція ψ є елементом простору $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}$. Отже,

$$|\xi^{2k}D^{2s}_\xi\psi(\xi)|\le c_1A_1^kB_1^sk^{2k(1-1/(2b))}s^{2\beta s},\xi\in\mathbb{R},\ \{k,s\}\subset\mathbb{Z}_+. \tag{4.53}$$

Скориставшись формулою диференціювання добутку двох функцій, знайдемо, що

$$|\xi^{2k} D_\xi^{2s} \Phi_{t,x}(\xi)| = |\xi^{2k} \sum_{l=0}^{2s} C_{2s}^l D_\xi^l \eta(\xi) D_\xi^{2s-l} T_\xi^x G(t,\xi)| \leq$$

$$\leq \Psi_{t,x}^1(\xi) + \Psi_{t,x}^2(\xi),$$

де

$$\Psi_{t,x}^1(\xi) = \sum_{l=0}^{2s} C_{2s}^l |\xi^{2k} D_\xi^l \psi(\xi)| \cdot |D_\xi^{2s-l} T_\xi^x G(t,\xi)|,$$

$$\Psi_{t,x}^2(\xi) = |\xi^{2k} D_\xi^{2s} T_\xi^x G(t,\xi)|.$$

Оскільки $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)} \subset S^{\beta}_{1-1/(2b)}$, то для функції $\psi \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{1-1/(2b)}$ справджуються нерівності

$$|D_\xi^l \psi(x)| \leq c_2 B_2^l l^{l\beta} \exp\{-a|\xi|^{2b/(2b-1)}\},\ l \in \mathbb{Z}_+,$$

з деякими додатними сталими $c_2, B_2, a > 0$. Тоді

$$|\xi^{2k} D_\xi^l \psi(\xi)| \leq c_2 B_2^l l^{l\beta} \sup_{|\xi|}\{|\xi|^{2k} \exp\{-a|\xi|^{2b/(2b-1)}\} \leq$$

$$\leq c_3 B_2^l l^{l\beta} A_2^k k^{2k(1-1/(2b))} \leq c_3 B_2^l l^{2l\beta} A_2^k k^{2k(1-1/(2b))}.$$

Оцінимо $\Psi_{t,x}^1(\xi)$, скориставшись нерівностями (4.53) та нерівностями (4.51), в яких покладемо $p = 1$; врахуємо також те, що $|x-\xi| \geq a_0 > 0$, де $a_0 = \min\{c - a_1,\ b_1 - a\}$. Отже,

$$\Psi_{t,x}^1(\xi) \leq c_3 \tilde{L}_0 \tilde{L}_2 a_0^{-2(\nu+1)-1} A_2^k k^{2k(1-1/(2b))} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{2s} C_{2s}^l B_2^l l^{2\beta l} a_0^{-2(s-l)} \tilde{L}_1^{s-l} (s-l)^{2(s-l)} \leq$$

$$\leq \tilde{L} A_2^k A_3^s k^{2k(1-1/(2b))} s^{2\beta s}, \qquad (4.54)$$

де $\tilde{L} = c_3\tilde{L}_0\tilde{L}_2 a_0^{-2(\nu+1)-1}$, $A_3 = 2\max\{B_2, \tilde{L}_1 a_0^{-2}\}$, сталі $\tilde{L}, A_2, A_3 > 0$ не залежать від t, x, ξ.

При оцінці $\Psi^2_{t,x}(\xi)$ врахуємо те, що

$$\exists d > 0\, \forall x \in [c,d]\, \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus [a_1, b_1] : |\xi|/|x-\xi| \le d.$$

Поклавши в (4.51) $p = 2k$, прийдемо до нерівностей

$$\Psi^2_{t,x} \le \tilde{L}_1 |\xi|^{2k} |x-\xi|^{-2(\nu+1)-2s-2k} \tilde{L}_1^s \tilde{L}_2^k s^{2s} k^{2k(1-1/(2b))} \le$$

$$\tilde{L}_1 a_0^{-2(\nu+1)} a_0^{-2s} d^{2k} \tilde{L}_1^s \tilde{L}_2^k s^{2s} k^{2k(1-1/(2b))} \le \tilde{\tilde{L}}_1 A_4^k A_5^s k^{2k(1-1/(2b))} s^{2s} \le$$

$$\le \tilde{\tilde{L}}_1 A_4^k A_5^s k^{2k(1-1/(2b))} s^{2\beta s}, \qquad (4.55)$$

де $\tilde{\tilde{L}} = \tilde{L}_1 a_0^{-2(\nu+1)}$, $A_4 = d^2 \tilde{L}_2$, $A_5 = a_0^{-2}\tilde{L}_1$, сталі $\tilde{\tilde{L}}, A_4, A_5 > 0$ не залежать від t, x, ξ, які змінюються вказаним способом. З нерівностей (4.54), (4.55) випливає нерівність (4.52). Теорема доведена.

Як приклад, розглянемо двоточкову задачу (4.42), (4.43) ($m = 1, \mu > \mu_1, t_1 = T$) для рівняння (4.42) з параметром $b = 1$ та $f = \delta$ (δ – дельта-функція Дірака) в умові (4.43). Розв'язок $u(t,x)$ такої задачі дається формулою

$$u(t,x) = \delta * G(t,x) = G(t,x) = 2^{-(2\nu+1)} \mu^{-1} \Gamma^{-1}(\nu+1)[t^{-(\nu+1)} \times$$

$$\times \exp\{-\frac{x^2}{4t}\} + \sum_{r=1}^{\infty} (\frac{\mu_1}{\mu})^r \frac{1}{(t+rT)^{\nu+1}} \exp\{-\frac{x^2}{4(t+rT)}\}.$$

Тоді

$$u(t,0) = 2^{-(2\nu+1)} \mu^{-1} \Gamma^{-1}(\nu+1) \Big[t^{-(\nu+1)} + \sum_{r=1}^{\infty} \Big(\frac{\mu_1}{\mu}\Big)^r \frac{1}{(t+rT)^{\nu+1}} \Big].$$

Звідси дістаємо, що $u(t,0) \to +\infty$ при $t \to +0$. Оскільки $supp\ \delta = \{0\}$ (δ-функція – фінітний функціонал), то, внаслідок доведеної теореми, наприклад, для всіх $x \in [c,d] \subset$

$[a_1, b_1] \subset (0, b)$, знайдеться стала $\alpha = \alpha(c, d) > 0$ така, що справджується нерівність $\sup\limits_{t\in[0,T]} |u(t, x)| \leq \alpha$. У даному випадку в цьому можна переконатися безпосередньо, оскільки

$$\sup_{t\in[0,T]} (t^{-(\nu+1)} \exp\{-\frac{x^2}{4t}\}) \leq \sup_{t\in[0,T]} (t^{-(\nu+1)} \exp\{-\frac{c^2}{4t}\}) \leq$$

$$\leq (\frac{4(\nu+1)}{c^2})^{\nu+1}, x \geq c$$

(тут враховано, що $\lim\limits_{t\to+0} t^{-(\nu+1)} \exp\{-\frac{c^2}{4t}\} = 0$). Отже, для всіх $x \in [c, d]$ справджується нерівність $\sup\limits_{t\in[0,T]} |u(t, x)| \leq \alpha$, де

$$\alpha = 2^{-(2\nu+1)}\mu^{-1}\Gamma^{-1}(\nu+1)\Big(\Big(\frac{4(\nu+1)}{c^2}\Big)^{\nu+1} + \frac{1}{T^{\nu+1}}\sum_{r=1}^{\infty}\Big(\frac{\mu_1}{\mu}\Big)^r\Big) =$$

$$= 2^{-(2\nu+1)}\mu^{-1}\Gamma^{-1}(\nu+1)\Big(\Big(\frac{4(\nu+1)}{c^2}\Big)^{\nu+1} + \frac{\mu_1}{T^{\nu+1}(\mu-\mu_1)}\Big).$$

У даному випадку отриманий результат можна сформулювати ще й так: для довільно фіксованого $\varepsilon > 0$ знайдеться стала $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ така, що $\sup\limits_{t\in[0,T]} |u(t, x)| \leq \alpha$ для всіх $x : |x| \geq \varepsilon$.

Розділ 5. Еволюційні рівняння із псевдодиференцільними операторами в просторах типу W

У цьому розділі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння $\partial u/\partial t = A_\varphi u$, де A_φ – псевдодиференціальний оператор з аналітичним символом φ у просторах типу W [13], який задовольняє умову "параболічності" – аналог умови "параболічності" для рівнянь з частинними похідними. При цьому оператор A_φ можна розуміти як оператор диференціювання "нескінченного порядку":

$$A_\varphi = F^{-1}_{\sigma\to x}[\varphi(\sigma)F_{x\to\sigma}] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(id/dx)^k,$$

де F, F^{-1} – пряме та обернене перетворення Фур'є. А також доведено розв'язність багатоточкової за часом задачі для рівняння $\dfrac{\partial u}{\partial t} = A_\varphi u$, де A_φ – псевдодиференіальний оператор, побудований за змінним символом, у класі обмежених неперервних на $\mathbb{R}$ функцій.

5.1. Простори типу W та W'

Розглянемо функцію $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, яка є неперервною і зростаючою, причому $\omega(0) = 0$, $\omega(1) \geq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \omega(x) = +\infty$. Для $x \geq 0$ покладемо $\Omega(x) = \int\limits_0^x \omega(\xi)d\xi$. Функція Ω є диференційовною і зростаючою на $[0,+\infty)$, опуклою донизу [13], тобто

$$\forall\{x_1,x_2\} \subset [0,+\infty): \ \ \Omega(x_1)+\Omega(x_2) \leq \Omega(x_1+x_2).$$

Оскільки функція $\omega(x)$ – похідна функції $\Omega(x)$ при $x \to +\infty$ необмежено зростає, то $\Omega(x)$ при $x \to +\infty$ зростає швидше за довільну лінійну функцію. Довизначимо функцію Ω на $(-\infty, 0]$ парним чином. Поруч розглянемо функцію μ: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, яка володіє такими ж властивостями, що і функція ω. Для $x \geq 0$ покладемо

$$M(x) = \int\limits_0^x \mu(\xi) d\xi, \quad M(-x) = M(x).$$

Функція M за своїми властивостями аналогічна функції Ω. За допомогою функцій M і Ω Б.Л.Гуревич увів [300] серію просторів, названих ним просторами типу W. Зокрема, символом W_M^Ω позначається сукупність цілих функцій φ: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, для яких

$$\exists c > 0 \ \exists a > 0 \ \exists b > 0 \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(z)| \leq c \exp\{-M(ax) + \Omega(by)\}. \tag{5.1}$$

У W_M^Ω вводиться топологія індуктивної границі просторів $W_{M,a}^{\Omega,b}$, які складаються з тих функцій $\varphi \in W_M^\Omega$, для яких справджуються нерівності

$$|\varphi(x+iy)| \leq c \exp\{-M(\overline{a}x) + \Omega(\overline{b}y)\}, \ z = x + iy \in \mathbb{C},$$

де $\overline{a}$ – довільна додатна стала, менша за a, $\overline{b}$ – довільна стала, більша за b. Якщо для $\varphi \in W_{M,a}^{\Omega,b}$ покласти

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{z\in\mathbb{C}}[|\varphi(z)| \exp\{-\Omega((b+\rho)y) + M(a(1-\delta)x)\}],$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \{1/n, n \geq 2\},$$

то з цими нормами $W_{M,a}^{\Omega,b}$ стає повним досконалим зліченно нормованим простором [13].

У праці [301] встановлено, що означення (5.1) простору W_M^Ω рівносильне такому:

$$(\varphi \in W_M^\Omega) \Leftrightarrow \Big(\exists \tilde{c} = \tilde{c}(\varphi) > 0 \ \exists \tilde{a} = \tilde{a}(\varphi) > 0 \ \exists \tilde{b} = \tilde{b}(\varphi) > 0$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+ \, \exists \rho_n \in [0,n), \rho_0 = 0 \; \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|\varphi^{(n)}(x)| \le \tilde{c}\Big(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\Big)^n n! \exp\{-M(\tilde{a}x) + \Omega(\rho_n)\}\Big), \qquad (5.2)$$

де ρ_n – розв'язок рівняння $x\omega(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, або

$$(\varphi \in W_M^\Omega) \Leftrightarrow \Big(\exists c_1, a_1, b_1 > 0 \, \forall k \in \mathbb{Z}_+ \exists \mu_k \in [0,k), \mu_0 = 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+ \exists \rho_n \in [0,n), \rho_0 = 0 \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c_1 n! \Big(\frac{b_1}{\rho_n}\Big)^n \Big(\frac{\mu_k}{a_1}\Big)^k \exp\{\Omega(\rho_n) - M(\mu_k)\}\Big),$$

де μ_k – розв'язок рівняння $x\mu(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$; при цьому збіжність в просторі W_M^Ω еквівалентна такій збіжності: послідовність $\{\varphi_n, n \ge 1\} \subset W_M^\Omega$ збігається до нуля в W_M^Ω, якщо при довільному $q \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\{\varphi_n^{(q)}, n \ge 1\}$ збігається до нуля рівномірно при $n \to +\infty$ на будь-якому скінченному проміжку в $\mathbb{R}$ і для функцій $\varphi_n^{(q)}$ справджуються нерівності вигляду (5.2) зі сталими $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c} > 0$, не залежними від n.

Важливим є питання про нетривіальність просторів W_M^Ω, оскільки ці простори можуть містити лише єдину функцію $\varphi(x) \equiv 0$. Однією з умов нетривіальності простору W_M^Ω є умова $M(x) \le \Omega(x)$. Надалі будемо вважати, що ця умова виконується (про необхідну й достатню умову нетривіальності простору W_M^Ω див. в [302]).

Функція g називається мультиплікатором у просторі W_M^Ω, якщо $g\psi \in W_M^\Omega$ для довільної функції $\psi \in W_M^\Omega$ і відображення $\psi \to g\psi$ є лінійним і неперервним оператором в W_M^Ω. Мультиплікатором у просторі W_M^Ω є кожна ціла однозначна функція g, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists c_\varepsilon > 0 \; \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|g(z)| \le c_\varepsilon \exp\{M(\varepsilon x) + \Omega(\varepsilon y)\}.$$

Сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину $\mathbb{C}$ і як функції комплексної змінної є елементами простору W_M^Ω, позначатимемо символом $W_M^\Omega(\mathbb{R})$.

Подібно до просторів типу S, введених в [22], простори типу W перетворенням Фур'є відображаються в простори типу W. Для того, щоб сформулювати відповідні твердження, наведемо означення функцій, двоїстих за Юнгом. Нехай функції $M(x)$ та $\Omega(y)$ визначаються за допомогою функцій $\mu(\xi)$ та $\omega(\eta)$ відповідно. Якщо функції μ та ω взаємно обернені, тобто $\mu(\omega(\eta)) = \eta$, $\omega(\mu(\xi)) = \xi$, то функції $M(x)$ та $\Omega(y)$ називаються двоїстими за Юнгом. У цьому випадку має місце нерівність Юнга

$$\forall x \in [0, +\infty) \ \forall y \in [0, +\infty) : \ xy \le M(x) + \Omega(y).$$

Якщо для заданого $x \in [0, +\infty)$ взяти $y = \mu(x)$, то нерівність Юнга для таких x, y перетворюється в рівність. Прикладами взаємно двоїстих функцій є функції:

$$M(x) = \frac{x^p}{p}, \quad \Omega(y) = \frac{y^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$M(x) = (x+1)\ln(x+1) - x, \quad \Omega(y) = e^y - y - 1.$$

Простори типу W перетворенням Фур'є відображаються у простори типу W [13], а саме, правильною є формула $F[W_M^\Omega(\mathbb{R})] = W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, де Ω_1 та M_1 – функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M та Ω, при цьому оператор Фур'є F: $W_M^\Omega(\mathbb{R}) \to W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ є неперервним.

У просторах W_M^Ω визначені і неперервні операції диференціювання. За певних умов у просторі W_M^Ω визначений і неперервний оператор диференціювання нескінченного порядку. Зокрема, якщо ціла функція $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$, – мультиплікатор у просторі W_M^Ω, то в просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$

визначений і є неперервним оператор диференціювання нескінченного порядку

$$\varphi(-iD_x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(-iD_x)^k,$$

при цьому оператор $\varphi(-iD_x)$ можна розуміти як псевдодиференціальний оператор, побудований за функцією φ; отже, якщо оператор $\varphi(-iD_x)$ позначити символом A_φ, то

$$(A_\varphi f)(x) = F^{-1}[\varphi(\sigma)]F[\varphi(x)], \quad \forall \varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}).$$

Символом $(W_M^\Omega(\mathbb{R}))'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями.

Оскільки в просторі $W_M^\Omega(\mathbb{R})$ визначена і є неперервною операція зсуву аргументу T_x: $\varphi(\xi) \to \varphi(\xi+x), \forall \varphi \in W_M^\Omega(\mathbb{R})$, то згортку узагальненої функції $f \in (W_M^\Omega(\mathbb{R}))'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) := \langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi)\rangle = \langle f_\xi, \varphi(x-\xi)\rangle,$$
$$\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi), \varphi \in W_M^\Omega(\mathbb{R}).$$

Якщо $f \in (W_M^\Omega(\mathbb{R}))'$ і $f * \varphi \in W_M^\Omega(\mathbb{R})$ для довільної функції $\varphi \in W_M^\Omega(\mathbb{R})$ і зі співвідношення $\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ за топологією простору $W_M^\Omega(\mathbb{R})$ випливає, що $f * \varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ за топологією простору $W_M^\Omega(\mathbb{R})$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $W_M^\Omega(\mathbb{R})$.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (W_M^\Omega(\mathbb{R}))'$ визначається як узагальнена функція, задана на просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$:

$$\langle F[f], \varphi\rangle = \langle f, F[f]\rangle, \quad \forall \varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}),$$

при цьому, якщо узагальнена функція $f \in (W_M^\Omega(\mathbb{R}))'$ – згортувач у просторі $W_M^\Omega(\mathbb{R})$, то для довільної функції $\varphi \in W_M^\Omega(\mathbb{R})$ правильною є формула $F[f * \varphi] = F[f]F[\varphi]$, $F[f]$ – мультиплікатор у просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$.

5.2. Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з аналітичними символами

Символом P_M^Ω позначимо клас цілих однозначних функцій φ: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які є мультиплікаторами в просторі W_M^Ω і такими, що $e^\varphi \in W_M^\Omega$, тобто

$$\exists a, b > 0\ \exists c:\ 0 < c \le 1 : |e^{\varphi(z)}| = |e^{\varphi(x+iy)}| \le$$
$$\le ce^{-M(ax)+\Omega(by)}, \forall z = x + iy \in \mathbb{C}. \qquad (5.3)$$

Нехай $\varphi \in P_M^\Omega$, A_φ – оператор диференціювання нескінченного порядку, побудований за функцією φ; A_φ: $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}) \to W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ (див. п. 5.1).

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = A_\varphi u, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \qquad (5.4)$$

для якого задамо нелокальну багатоточкову за часом умову

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)|_{t=t_1} - \cdots - \mu_m u(t,\cdot)|_{t=t_m} = f, \quad (5.5)$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0,+\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0,+\infty)$ – фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < +\infty$, $f \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$.

Класичний розв'язок задачі (5.4), (5.5) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є. У результаті одержимо, що

$$u(t,x) = G(t,x) * f, \quad (t,x) \in \Omega,$$

де $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$, $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$,

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\}, Q_2(\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\Big)^{-1}.$$

Для того, щоб дослідити властивості функції G, насамперед вивчимо властивості функцій Q_1 та Q_2. Правильним є твердження.

Лема 5.1. *Нехай* $\varphi \in P_M^\Omega$. *Функція* $Q_1(t,z) = e^{t\varphi(z)}$, $t \in (0,+\infty)$, $z \in \mathbb{C}$, *при кожному* $t \in (0,+\infty)$, *як функція* z, *є елементом простору* W_M^Ω. *Існують сталі* $\tilde{a}$, $\tilde{b} > 0$ *такі, що для функції* $Q_1(t,x)$, $(t,x) \in (1,+\infty)\times\mathbb{R}$, *та її похідних (за змінною* $x \in \mathbb{R}$*) справджуються нерівності*

$$|D_x^n Q_1(t,x)| \le \left(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\right)^n t^n n! e^{\Omega(\rho_n)} e^{-M(\tilde{a}x)}, n \in \mathbb{Z}_+, \qquad (5.6)$$

де ρ_n *– розв'язок рівняння* $x\omega(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доведення. Оскільки $\varphi \in P_M^\Omega$, то справджується нерівність (5.3). Тоді

$$|e^{t\varphi(z)}| = |e^{\varphi(z)}|^t \le [e^{-M(ax)+\Omega(by)}]^t \le e^{-tM(ax)+t\Omega(by)}, \quad (5.7)$$

Із нерівності (5.7) випливає, що $Q_1(t,\cdot) \in W_M^\Omega$ при кожному $t \in (0,+\infty)$. Для доведення цього факту скористаємося тим, що функція Ω володіє властивостями: а) $\forall \alpha \ge 1$ $\forall x \in [0,+\infty)$: $\Omega(\alpha x) \ge \alpha\Omega(x)$; б) $\forall \alpha \in (0,1)$ $\forall x \in [0,+\infty)$: $\Omega(\alpha x) \le \alpha\Omega(x)$. Ці властивості випливають з рівності

$$\Omega(\alpha x) = \alpha \int_0^x \omega(\alpha\xi)d\xi, x \ge 0,$$

яка виконується для довільного $\alpha > 0$ з урахуванням монотонного зростання функції ω на $[0,+\infty)$. Аналогічні властивості справджуються і для функції M.

Отже, при фіксованому $t \in (0,1)$

$$-tM(ax) \le -M(tax), \quad \exp\{-tM(ax) + t\Omega(by)\} \le$$

$$\le \exp\{-M(tax) + \Omega(tby)\} \le \exp\{-M(tax) + \Omega(by)\}.$$

Якщо $t > 1$, $t \ne n$, $n \in \{2,3,4,\dots\}$, то $t = [t] + \{t\}$. Тоді

$$\exp\{-tM(ax)\} = \exp\{-[t]M(ax)\} \cdot \exp\{-\{t\}M(ax)\} \le$$

$$\leq \exp\{-\{t\}M(ax)\} \leq \exp\{-M(\{t\}ax)\},$$

$$\exp\{t\Omega(by)\} \leq \exp\{\Omega(bty)\}.$$

Якщо $t = n$, $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$, то $t = 1 + n - 1$. Тоді

$$\exp\{-tM(ax)\} = \exp\{-M(ax)\} \cdot \exp\{-(n-1)M(ax)\} \leq$$

$$\leq \exp\{-M(ax)\}, \quad \exp\{t\Omega(by)\} \leq \exp\{\Omega(bty)\}.$$

Звідси випливає, що $Q_1(t, \cdot) \in W_M^\Omega$ при кожному $t \in (0, +\infty)$. Зокрема, якщо $t > 1$, то правильною є оцінка

$$|Q_1(t, z)| \leq e^{-M(\overline{a}x)+\Omega(bty)}, z = x + iy \in \mathbb{C}, \qquad (5.8)$$

де

$$\overline{a} = \begin{cases} a\{t\}, & \text{якщо } t \in (1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}, \\ a, & \text{якщо } t = n, n \in \{2, 3, 4, \dots\}, \end{cases}$$

$\{t\}$ – дробова частина числа t.

Доведемо тепер, що правильними є нерівності (5.6). Внаслідок інтегральної формули Коші

$$D_x^n Q_1(t, x) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{Q_1(t, z)}{(z - x)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $x \in \mathbb{R}$. Скориставшись (5.8), прийдемо до нерівностей

$$|D_x^n Q_1(t, x)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{z \in \Gamma_R} |Q_1(t, z)| \leq \frac{n!}{R^n} \exp\{-M(\overline{a}x_0) + \Omega(btR)\},$$

де x_0 – точка максимуму функції $\exp\{-M(\overline{a}\xi)\}$, $\xi \in [x - R, x + R]$. Зауважимо, що

$$x_0 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |\xi| < R, \\ \xi + R, & \text{якщо } \xi \leq -R, \\ \xi - R, & \text{якщо } \xi \geq R. \end{cases}$$

Оскільки M – опукла донизу на проміжку $(0, +\infty)$ функція, то вона задовольняє нерівність $M(\xi_1) + M(\xi_2) \leq M(\xi_1 + \xi_2)$, $\xi_1, \xi_2 \in (0, +\infty)$, або нерівність $M(\xi_1) - M(\xi_1 + \xi_2) \leq -M(\xi_2)$. Звідси випливає існування сталих $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ таких, що

$$\exp\{-M(\overline{a}x_0)\} \leq \exp\{-M(a_1x) + M(a_2R)\}, \forall R > 0, x > 0.$$

Оскільки $M(a_2R) \leq \Omega(a_2R)$ (умова нетривіальності простору W_M^Ω), то справджується нерівність

$$\exp\{-M(\overline{a}x_0)\} \leq \exp\{-M(a_1x)\} \cdot \exp\{M(a_2R)\} \leq$$

$$\leq \exp\{-M(a_1x)\} \cdot \exp\{\Omega(a_2R)\}.$$

Оскільки $btR + a_2R < btR + a_2tR = (b + a_2)tR$, якщо $t > 1$, то, з урахуванням нерівності опуклості для функції Ω, знайдемо, що

$$|D_x^n Q_1(t, z)| \leq \frac{n!}{R^n} \exp\{-M(a_1x)\} \cdot \exp\{\Omega(b_1tR)\}, b_1 = b + a_2.$$

Для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ функція $g_n(R) = R^{-n} \exp\{\Omega(b_1tR)\}$ диференційовна, причому

$$\lim_{R \to +\infty} g_n(R) = +\infty, \lim_{R \to +0} g_n(R) = \begin{cases} +\infty, & n \in \mathbb{N}, \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

Оскільки $g_n(R) > 0$, $R \in (0, +\infty)$, то ця функція досягає свого інфімуму, який знайдемо за допомогою методів диференціального числення:

$$g_n'(R) = R^{-(n+1)}(b_1tR\omega(b_1tR) - n)e^{\Omega(b_1tR)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

(тут $\omega = \Omega'$). Прирівнявши $g_n'(R)$ до нуля дістанемо, що $b_1tR\omega(b_1tR) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Безпосередньо переконуємося в тому, що $g_n(R)$ досягає свого інфімуму в точці $R_n =$

$b_1^{-1}t^{-1}\rho_n$, де ρ_n – розв'язок рівняння $x\omega(x) = n$ ($\rho_0 = 0$, якщо $n = 0$; $\rho_n \le n$, якщо $n \in \mathbb{N}$). Отже,

$$\inf_{R>0} g_n(R) = \Big(\frac{b_1 t}{\rho_n}\Big)^n e^{\Omega(\rho_n)}.$$

Таким чином,

$$|D_x^n Q_1(t,x)| \le n! \inf_{R>0} g_n(R) \exp\{-M(a_1 x)\} \le$$

$$\le \Big(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\Big)^n t^n n! \exp\{-M(\tilde{a}x) + \Omega(\rho_n)\},$$

де $\tilde{b} = b_1$, $\tilde{a} = a_1$. Лема доведена.

Зауважимо, що якщо $t \in (0,1)$, то правильними є оцінки

$$|D_x^n Q_1(t,x)| \le \Big(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\Big)^n n! e^{\Omega(\rho_n)} e^{-M(atx)}, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Наслідок 5.1. *$Q_1(t,x) \in W_M^\Omega(\mathbb{R})$ при кожному $t \in (0,+\infty)$.*

Лема 5.2. *Для похідних функції $Q_2(x) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t,x)\Big)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$, справджуються оцінки*

$$|D_x^n Q_2(x)| \le \tilde{c}\Big(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\Big)^n t_m^n n! e^{\Omega(\rho_n)}, \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, \tag{5.9}$$

де $\tilde{c} = \mu^{-1} \sum_{r=0}^\infty \tilde{\mu}^r r^n$, $\tilde{\mu} = \mu^{-1}\mu_0 m < 1$, $\mu_0 = \max\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$, $\tilde{b}$ – стала з нерівності (5.6).

Доведення. Із оцінок (5.6) випливають нерівності $Q_1(t_k,x)| < 1$, $k \in \{1, \dots, m\}$. Оскільки

$$\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,x) = \mu^{-1}\Big(1 - \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,x)\Big),$$

причому
$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,x) < \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m}\mu_k < 1,$$
то, скориставшись поліноміальною формулою, знайдемо, що
$$Q_2(x) = \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-r}\Big(\sum_{k=1}^{m}\mu_k e^{t_k\varphi(x)}\Big)^r = \sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\times$$
$$\times\Big(\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\dots r_m!}(\mu_1 e^{t_1\varphi(x)})^{r_1}\dots(\mu_m e^{t_m\varphi(x)})^{r_m}\Big) =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\dots r_m!}\mu_1^{r_1}\dots\mu_m^{r_m}Q_1(\lambda,x),$$
де $\lambda = t_1r_1+\dots+t_mr_m \le t_m(r_1+\dots+r_m) = t_m r$. Звідси та з (5.6) випливають нерівності
$$|D_x^n Q_2(\sigma)| \le \Big(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\Big)^n t_m^n n! e^{\Omega(\rho_n)}\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\mu_0^r r^n \sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\dots r_m!},$$
де $\mu_0 = \max\{\mu_1,\dots,\mu_m\}$. Далі скористаємося тим, що
$$\sum_{r_1+\dots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\dots r_m!} = m^r.$$
Тоді
$$|D_x^n Q_2(x)| \le \tilde{c}\Big(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\Big)^n t_m^n n! e^{\Omega(\rho_n)},$$
де $\tilde{c} = \mu^{-1}\sum\limits_{r=0}^{\infty}\tilde{\mu}^r r^n$, $\tilde{\mu} = \mu^{-1}\mu_0 m < 1$. Твердження доведено.

Зауважимо, що функція Q_2 обмежена на $\mathbb{R}$, бо
$$|Q_2(x)| \le \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\Big)^{-1} \equiv \alpha_0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Звідси та з оцінок (5.9) випливає, що Q_2 – мультиплікатор в просторі $W_M^{\Omega}(\mathbb{R})$. Оскільки $Q_1(t,\cdot) \in W_M^{\Omega}(\mathbb{R})$, а Q_2 – мультиплікатор в цьому просторі, то функція $Q(t,x) = Q_1(t,x)Q_2(x)$ є елементом простору $W_M^{\Omega}(\mathbb{R})$. Функція $G(t,\cdot)$ – обернене перетворення Фур'є функції $Q(t,\cdot) \in W_M^{\Omega}(\mathbb{R})$, тому $G(t,\cdot)$ – елемент простору $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ (при кожному $t \in (0,\infty)$). Скориставшись зображенням функції Q_2, знайдемо, що

$$G(t,\sigma) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} Q_1(t,x)Q_2(x)e^{i\sigma x}dx =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{t\varphi(x)} \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k e^{t_k\varphi(x)}\Big)^{-1} e^{i\sigma x}dx =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{t\varphi(x)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{r+1}} \sum_{r_1+\cdots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!} \times$$

$$\times e^{(t_1r_1+\cdots+t_mr_m)\varphi(x)}e^{i\sigma x}dx =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{r+1}} \sum_{r_1+\cdots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!} \tilde{G}(t_1r_1+\cdots+t_mr_m+t,\sigma),$$

де $\tilde{G}(t_1r_1 + \cdots + t_mr_m + t,\sigma) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{(t_1r_1+\cdots+t_mr_m+t)\varphi(x)}e^{i\sigma x}dx$, $\tilde{G}(t,\sigma)$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (5.4), тобто $\tilde{G}(t,\sigma) = F^{-1}[Q_1(t,x)](\sigma)$. Зазначимо, що $\tilde{G}(t,\cdot) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t \in (0,\infty)$, тобто $\tilde{G}(t,z) \in W_{M_1}^{\Omega_1}$, $z \in \mathbb{C}$, при кожному $t \in (0,\infty)$. Для проведення подальших міркувань здійснимо оцінку $\tilde{G}(t,z)$, $z \in \mathbb{C}$, виділивши при цьому залежність від параметра t.

Оскільки $Q_1(t,\cdot) \in W_M^{\Omega}$ при кожному $t \in (0,+\infty)$, то $Q_1(t,x+iy)$ прямує до нуля при $|x| \to +\infty$ швидше за будь-який степінь $|x|^{-1}$ рівномірно в кожній смузі $|y| \le y_0$ (при фіксованому $t \in (0, +\infty)$), а функція $e^{i\sigma z}$ залишається в цій смузі обмеженою за модулем. Тому, скориставшись інтегральною теоремою Коші, інтегрування вздовж дійсної осі Ox замінимо інтегруванням вздовж будь-якої прямої, паралельної осі Ox, тобто

$$\tilde{G}(t,\sigma) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \exp\{t\varphi(x+iy) + i(x+iy)\sigma\}dx, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

При фіксованому $t \in (0,\infty)$ функція $G(t,\cdot)$ є цілою функцією, тому можна здійснити аналітичне продовження, замінивши при цьому σ на $\sigma + i\tau = s$. У результаті прийдемо до співвідношення

$$\tilde{G}(t,\sigma+i\tau) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \exp\{t\varphi(x+iy) + i(x+iy)(\sigma+i\tau)\}dx.$$

Тоді, з урахуванням нерівності (5.7), маємо, що

$$|\tilde{G}(t,\sigma+i\tau)| \le c \int_{\mathbb{R}} \exp\{-tM(ax) + t\Omega(by) - y\sigma - x\tau\}dx \le$$

$$\le c\exp\{-\sigma y + t\Omega(by)\} \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp\{-tM(ax) + |x|\,|\tau|\}dx =$$

$$= 2c\exp\{-\sigma y + t\Omega(by)\} \cdot \int_0^\infty \exp\{-tM(ax) + x|\tau|\}dx, c = (2\pi)^{-1}.$$

Оцінимо вираз $-tM(ax) + x|\tau|$. Нехай Ω_1 – двоїста за Юнгом функція до функції M. Тоді, скориставшись нерівністю Юнга, знайдемо, що

$$-tM(ax) + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon|\tau|}{at} \le -tM(ax) + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Big[M\Big(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\Big) + \Omega_1\Big(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\Big)\Big],$$

для довільно фіксованого параметра $\varepsilon > 1$. Оскільки $ax \geq \dfrac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}$, $x \geq 0$, M – зростаюча функція, то $M(ax) \geq M(ax/\sqrt{\varepsilon})$. Тоді

$$-tM(ax) \leq -tM\Big(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\Big), \quad t > 0.$$

Отже,

$$-tM(ax)+x|\tau| \leq -tM\Big(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)+\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}M\Big(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)+\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\Big(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\Big) \leq$$

$$\leq -\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}}tM\Big(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\Big) + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\Big(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\Big).$$

Звідси випливає оцінка:

$$J := \int\limits_0^\infty \exp\{-tM(ax) + x|\tau|\}dx \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\infty \exp\Big\{-\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}}tM\Big(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)\Big\}dx \cdot \exp\Big\{\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\Big(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\Big)\Big\}.$$

Крім того,

$$\exp\Big\{-\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}}tM\Big(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)\Big\} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{(\sqrt{\varepsilon}-1)t}\cdot\frac{1}{M\Big(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)},$$

$$J \leq c_0 t^{-1}\exp\Big\{\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\Big(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\Big)\Big\}, c_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}-1}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{M\Big(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)}.$$

Отже,

$$|\tilde{G}(t,\sigma+i\tau)| \leq \tilde{c}t^{-1}\exp\Big\{\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\Big(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\Big) - \sigma y + t\Omega(by)\Big\}.$$

Нехай M_1 – функція, двоїста за Юнгом до Ω. Оцінимо вираз $\alpha := -\sigma y + t\Omega(by)$. Для цього підберемо знак y так, щоб справджувалася рівність $\sigma y = |\sigma| \cdot |y|$, а величину y візьмемо так, щоб нерівність Юнга $\sigma y \le M_1(\sigma) + \Omega(y)$, $\sigma \ge 0$, $y \ge 0$, перетворилася у рівність вигляду

$$|\sigma| \cdot |y| = t\Big[\frac{|\sigma|}{tb} b|y|\Big] = t\Big[M_1\Big(\frac{\sigma}{tb}\Big) + \Omega(by)\Big].$$

Отже,

$$\alpha = -tM_1\Big(\frac{\sigma}{tb}\Big) - t\Omega(by) + t\Omega(by) = -tM_1\Big(\frac{\sigma}{tb}\Big).$$

Таким чином,

$$|\tilde{G}(t, \sigma + i\tau)| \le \tilde{c}t^{-1} \exp\Big\{ - tM_1\Big(\frac{\sigma}{tb}\Big) + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\Big(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\Big)\Big\} \le$$

$$\le \tilde{c}t^{-1} \exp\Big\{ - tM_1\Big(\frac{\sigma}{tb}\Big) + t\Omega_1\Big(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\Big)\Big\}, \quad \varepsilon > 1. \qquad (5.10)$$

Повернемося тепер до оцінки функції $G(t, \sigma)$, урахувавши при цьому нерівність (5.10) при $\tau = 0$. У результаті дістанемо, що

$$|G(t, \sigma)| \le \tilde{c}t^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}^r \times$$

$$\times \exp\{-(t_1 r_1 + \dots + t_m r_m + t)\} M_1\Big(\frac{\sigma}{b(t_1 r_1 + \dots + t_m r_m + t)}\Big) \le$$

$$\le \tilde{c}t^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}^r = \tilde{c}' t^{-1}, \forall \sigma \in \mathbb{R}, \qquad (5.11)$$

де $\tilde{c}' = c(1 - \tilde{\mu})^{-1}$. Зауважимо, що функція $G(t, \sigma)$ – неперервна функція аргумента $t \in (0, +\infty)$. Справді, з (5.7) випливає, що для $t \ge t_0 > 0$ справджується нерівність

$$Q(t, x) = Q_1(t, x) Q_2(x) \le e^{-t_0 M(ax)} \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\Big)^{-1}.$$

Звідси вже випливає рівномірна збіжність інтеграла

$$(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,x)e^{i\sigma x}dx = G(t,\sigma)$$

у довільній смузі $\{(t,x) : 0 < t_0 \leq t, x \in \mathbb{R}\}$. Отже, функція $G(t,\cdot)$ неперервна в кожній точці проміжку $(0,\infty)$. Аналогічно доводимо диференційовність $G(t,\cdot)$ за змінною t на $(0,+\infty)$.

Лема 5.3. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}, \quad \forall f \in (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'.$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основною маємо

$$f * G(t,x) = \langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle, \quad \check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[(f * G(t+\Delta t,\cdot)) - (f * G(t,\cdot))] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x}\check{G}(t,\cdot)]\right\rangle.$$

Граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x}\check{G}(t,\cdot)] \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\cdot)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, тому, з урахуванням неперервності функціонала f, маємо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = \left\langle f_\xi, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x}\check{G}(t,\cdot)]\right\rangle =$$

$$= \left\langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t} T_{-x} \check{G}(t,\cdot) \right\rangle = \left\langle f_\xi, T_{-x} \frac{\partial}{\partial t} \check{G}(t,\xi) \right\rangle = f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

Твердження доведено.

Символом $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)'$ позначимо клас узагальнених функцій з $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'$, які є згортувачами у просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$.

Лема 5.4. *Нехай*

$$\omega(t,x) = f * G(t,x), \quad f \in (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)', (t,x) \in \Omega.$$

Тоді в просторі $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t \to +0} \omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \omega(t,\cdot) = f. \tag{5.12}$$

Доведення. Врахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є та формулу

$$F[f * G] = F[f] \cdot F[G] = F[f] Q(t,x),$$

яка правильна для довільної узагальненої функції з класу $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)'$, співвідношення (5.12) запишемо у вигляді

$$\mu \lim_{t \to +0} F[\omega(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} F[\omega(t,\cdot)] =$$

$$= F[f] \Big(\mu \lim_{t \to +0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} Q(t,\cdot) \Big)$$

(вказані границі розглядаються в просторі $(W_M^{\Omega}(\mathbb{R}))'$). Доведемо, що в просторі $(W_M^{\Omega}(\mathbb{R}))'$ справджується співвідношення

$$\mu \lim_{t \to +0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} Q(t,\cdot) = 1. \tag{5.13}$$

Для доведення (5.13) візьмемо довільну функцію $\psi \in W_M^{\Omega}(\mathbb{R})$ і, скориставшись теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо, що

$$\mu \lim_{t\to+0} \langle Q(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} \langle Q(t,\cdot),\psi\rangle =$$

$$= \mu \lim_{t\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big[\mu Q(0,\sigma) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l Q(t_l,\sigma)\Big]\psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big[\frac{\mu}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)} - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \frac{Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)}\Big]\psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mu - \sum\limits_{l=1}^{m} \mu_l Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)}\psi(\sigma)d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(\sigma)d\sigma = \langle 1,\psi\rangle$$

(тут $Q(t,\cdot)$ трактується як регулярна узагальнена функція з простору $(W_M^{\Omega}(\mathbb{R}))'$). Отже, співвідношення (5.13) виконується. Звідси випливає, що правильним є співвідношення (5.12).

Лема доведена.

Зауважимо, що з (5.13) випливає співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} G(t,\cdot) = \delta$$

(δ – дельта-функція Дірака), яке виконується в просторі $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'$.

З леми 5.4 випливає, що для рівняння (5.4) нелокальну багатоточкову за часом задачу можна ставити так: знайти розв'язок рівняння (5.4), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f, \quad f \in (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)', \tag{5.14}$$

де граничні співвідношення розглядаються в просторі $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'$. Правильним є твердження.

Теорема 5.1. *Задача* (5.4), (5.14) *коректно розв'язна. Розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x), \quad (t,x) \in \Omega,$$

причому $u(t,\cdot) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ *при кожному* $t \in (0,\infty)$.

Доведення. Функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (5.4). Справді (див. лему 5.3)

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,x)) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t},$$

$$A_\varphi u(t,x) = F^{-1}[\varphi(\sigma) F[f * G(t,x)](\sigma)](x).$$

Оскільки f – згортувач в просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, то

$$F[f * G(t,\cdot)] = F[f] F[G(t,\cdot)] = F[f] Q(t,\cdot).$$

Отже,

$$A_\varphi u(t,x) = F^{-1}[\varphi(\sigma) Q(t,\sigma) F[f](\sigma)](x) =$$

$$= F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma) F[f](\sigma)\Big](x) = F^{-1}\Big[F\Big[\frac{\partial}{\partial t} G\Big] \cdot F[f]\Big](x) =$$

$$= F^{-1}\Big[F\Big[f * \frac{\partial G}{\partial t}\Big]\Big] = f * \frac{\partial G}{\partial t}.$$

Звідси випливає, що функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (5.4). З леми 4 випливає, що u задовольняє умову (5.14) у вказаному сенсі.

Доведемо, що задача (5.4), (5.14) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A_\varphi^* v = 0, (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R}, 0 \le t < t_0 < +\infty, \quad (5.15)$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi \in (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)', \qquad (5.16)$$

де $A_\varphi^* = F[\varphi F^{-1}[g]]$, $\forall g \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, A_φ^* – звуження спряженого оператора до оператора A_φ на простір $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}) \subset (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'$. Умову (5.16) розуміємо в слабкому сенсі.

Із результатів, отриманих в [303], випливає, що задача Коші (5.15), (5.16) є розв'язною, при цьому $v(t,\cdot) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t \in [0,t_0)$.

Нехай $Q_{t_0}^t$: $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)' \to W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ – оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)'$ розв'язок задачі (5.15), (5.16). Оператор $Q_{t_0}^t$ – лінійний і неперервний, він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 < +\infty$ і володіє властивостями:

$$\forall \psi \in (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)' : \ \frac{dQ_{t_0}^t \psi}{dt} + A_\varphi^* Q_{t_0}^t \psi = 0, \quad \lim_{t \to t_0} Q_{t_0}^t \psi = \psi$$

(границя розглядається в просторі $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'$).

Розглянемо розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задачі (5.4), (5.14), який розумітимемо як регулярний функціонал з простору $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)' \supset W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$. Доведемо, що задача (5.4), (5.14) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (5.4) при нульовій початковій умові може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$ (при кожному $t \in (0,+\infty)$). Застосуємо функціонал u до функції $Q_{t_0}^t \psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, де ψ – довільно фіксований елемент з простору $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}) \subset (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (5.4), (5.14), знайдемо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q_{t_0}^t \psi \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial Q_{t_0}^t \psi}{\partial t} \right\rangle =$$

$$= \langle A_\varphi u, Q_{t_0}^t \psi \rangle - \langle u, A_\varphi^* Q_{t_0}^t \psi \rangle =$$

$$= \langle A_\varphi u, Q_{t_0}^t \psi \rangle - \langle A_\varphi u, Q_{t_0}^t \psi \rangle = 0, t \in [0, t_0).$$

Звідси випливає, що $\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi \rangle$ є сталою величиною, при цьому справджується граничне співвідношення

$$\lim_{t \to t_0} \langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi \rangle = \langle u(t_0,\cdot), \psi \rangle = \text{const} = c$$

у довільній точці $t_0 \in (0, +\infty)$. Отже, якщо в (5.14) $f = 0$, то

$$\mu \lim_{t \to +0} \langle u(t,\cdot), \psi \rangle - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \langle u(t,\cdot), \psi \rangle = \mu c_0 - \sum_{k=1}^{m} \mu_k c_k = 0,$$

де c_0, c_1, $\ldots$, c_m – довільні сталі. Доведемо, що $c_0 = 0$. Якщо це не так, тобто $c_0 \neq 0$, то $c_1 = c_0 \alpha_1$, $\ldots$, $c_m = c_0 \alpha_m$. Тоді маємо співвідношення: $\mu c_0 - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k c_0 \alpha_k = 0$, тобто $c_0 \Big(\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \alpha_k \Big) = 0$. Якщо $c_0 \neq 0$, то $\mu = \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \alpha_k$, де α_k, $k \in \{1, \ldots, m\}$, – довільні сталі. Це суперечить тому, що μ – фіксований параметр. Отже, $c_0 = 0$. Аналогічно доводимо, що $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$. Таким чином, $\langle u(t_0,\cdot), \psi \rangle = 0$ для довільного $\psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, тобто $u(t_0, x)$ – нульовий функціонал з простору $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)'$. Оскільки $t_0 \in (0, +\infty)$ і t_0 вибране довільним чином, то $u(t,\cdot) = 0$ для всіх $t \in (0, +\infty)$. Теорема доведена.

Теорема 5.2. *Розв'язок* $u(t,x)$ *нелокальної багатоточкової за часом задачі* (5.4), (5.14) *збігається до нуля в просторі* $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'$ *при* $t \to +\infty$.

Доведення. Нагадаємо, що розв'язок задачі (5.4), (5.14) дається формулою

$$u(t,x) = f * G(t,x) = \langle f_\xi, T_{-x} \check{G}(t,\xi) \rangle = \langle f_\xi, G(t, x - \xi) \rangle.$$

Нехай $\psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$. Покладемо

$$\Phi_t(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, x-\xi)\psi(x)dx, \quad \Phi_{t,R}(\xi) = \int\limits_{-R}^{R} G(t, x-\xi)\psi(x)dx,$$

$R > 0$.

У цих позначеннях перевіримо, що: а) при кожному $t > 1$ і $R > 0$ функція $\Phi_{t,R}(\xi)$ належить до простору $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, $\Phi_{t,R}(\xi) \to \Phi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ у просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$; б) $\Phi_t(\xi) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t > 0$. Звідси випливатиме, що

$$\langle u(t,x), \psi(x)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \langle f_\xi, G(t, x-\xi)\rangle \psi(x)dx =$$

$$= \langle f_\xi, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,x)\psi(x+\xi)dx\rangle =$$

$$= \langle f_\xi, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\psi(-(y-\xi))dy\rangle = \langle f_\xi, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\check{\psi}(y-\xi)dy\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\langle f_\xi, \check{\psi}(y-\xi)\rangle dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)(f * \check{\psi})(y)dy$$

(тут $u(t,\cdot)$ трактується як регулярна узагальнена функція з простору $(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}))'$ при кожному $t > 0$).

Отже, встановимо а). При фіксованих $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$ маємо:

$$|\xi^k D_\xi^n \Phi_{t,R}(\xi)| \le \int\limits_{-R}^{R} |\xi^k \psi(x) D_\xi^n G(t, x-\xi)|dx \le$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\xi^k \psi(\xi+\eta) D_\eta^n G(t,\eta)| d\eta.$$

Оскільки $\psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, то при деяких $\overline{c}$, $\overline{a}$, $\overline{b} > 0$ справджуються нерівності (див. п. 5.1)

$$|\xi^k D_\xi^n \psi(\xi)| \leq \overline{c} n! \Big(\frac{b_1}{\rho_n}\Big)^n \Big(\frac{\mu_k}{\overline{a}}\Big)^k \exp\{\Omega_1(\rho_n) -$$

$$- M_1(\mu_k)\}, \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+, \{\xi,\eta\} \subset \mathbb{R}.$$

Звідси, при кожному $\eta \in \mathbb{R}$ дістаємо оцінки:

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\xi^k \psi(\xi+\eta)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |(y-\eta)^k \psi(y)| =$$

$$= \sup_{y\in\mathbb{R}} \Big| \sum_{l=0}^{k} C_k^l y^l (-\eta)^{k-l} \psi(y) \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{k} C_k^l |\eta|^{k-l} \sup_{y\in\mathbb{R}} |y^l \psi(y)| \leq \overline{c} \sum_{l=0}^{k} C_k^l \Big(\frac{\mu_l}{\overline{a}}\Big)^l |\eta|^{k-l} e^{-M(\mu_l)}. \tag{5.17}$$

Як встановлено раніше, $G(t,\cdot) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t > 0$, тому для функції G та її похідних (за змінною η) справджуються оцінки:

$$|D_\eta^n G(t,\eta)| \leq \tilde{c} \Big(\frac{\tilde{b}}{\overline{\rho}_n}\Big)^n n! e^{\Omega(\rho_n)} e^{-M_1(\tilde{a}\eta)}, n \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{R},$$

з деякими сталими $\tilde{c}$, $\tilde{b}$, $\tilde{a} > 0$, залежними від t, $\overline{\rho}_n = \overline{\rho}_n(t)$.

Урахувавши (5.17) та останню нерівність, знайдемо, що

$$|\xi^k D_\xi^n \Phi_{t,R}(\xi)| \leq \overline{c}\tilde{c} \Big(\frac{\tilde{b}}{\overline{\rho}_n}\Big)^n n! e^{\Omega(\rho_n)} \sum_{l=0}^{k} C_k^l \Big(\frac{\mu_l}{\overline{a}}\Big)^l e^{-M_1(\mu_l)} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} e^{-M_1(\tilde{a}\eta)} d\eta.$$

Здійснивши заміну змінної інтегрування $\tilde{a}\eta = z$, прийдемо до співвідношення

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\{-M_1(\tilde{a}\eta)\} d\eta =$$

$$= \Big(\frac{1}{\tilde{a}}\Big)^{k-l+1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |z|^{k-l} \exp\{-M_1(z)\} dz =$$

$$= 2\Big(\frac{1}{\tilde{a}}\Big)^{k-l+1} \int\limits_{0}^{\infty} z^{k-l} \exp\{-M_1(z)\} dz.$$

Скориставшись властивістю опуклості функції M_1, знайдемо, що

$$\exp\{-M_1(z)\} \leq \exp\Big\{-M_1\Big(\frac{z}{2}\Big)\Big\} \cdot \exp\Big\{-M_1\Big(\frac{z}{2}\Big)\Big\}.$$

Тоді

$$J_{k-l} := \int\limits_{0}^{\infty} z^{k-l} \exp\{-M_1(z)\} dz \leq \sup_{z \geq 0} \Big(z^{k-l} \exp\Big\{-M_1\Big(\frac{z}{2}\Big)\Big\}\Big) \times$$

$$\times \int\limits_{0}^{\infty} \exp\Big\{-M_1\Big(\frac{z}{2}\Big)\Big\} dz.$$

Оскільки

$$\sup_{z \geq 0} \Big(z^{k-l} \exp\Big\{-M_1\Big(\frac{z}{2}\Big)\Big\}\Big) = (2\tilde{\mu}_{k-l})^{k-l} e^{-M_1(\tilde{\mu}_{k-l})},$$

то правильна нерівність

$$J_{k-l} \leq c_0 (2\tilde{\mu}_{k-l})^{k-l} e^{-M_1(\tilde{\mu}_{k-l})}, \quad l \in \{0, 1, \dots, k\},$$

де $c_0 = \int\limits_0^\infty \exp\Big\{ -M_1\Big(\dfrac{z}{2}\Big)\Big\} dz.$

Тоді

$$|\xi^k D_\xi^n \Phi_{t,R}(\xi)| \leq \frac{2c_0 \overline{c}\tilde{c}}{\overline{a}} \Big(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\Big)^n n! e^{\Omega_1(\rho_n)} \sum_{l=0}^k C_k^l \Big(\frac{\mu_l}{\overline{a}}\Big)^l e^{-M_1(\mu_l)} \times$$

$$\times (2\tilde{\mu}_{k-l})^{k-l} e^{-M_1(\tilde{\mu}_{k-l})}.$$

Далі зауважимо, що $\tilde{\mu}_k < \mu_k$ при $t > 1$, оскільки $\tilde{\mu}_k = \tilde{\mu}_k(t)$. Тоді

$$\Lambda := \Big(\frac{\mu_l}{\overline{a}}\Big)^l e^{-M_1(\mu_l)} \tilde{\mu}_{k-l}^{k-l} e^{-M_1(\tilde{\mu}_{k-l})} \leq \Big(\frac{\mu_l}{\overline{a}}\Big)^l e^{-M_1(\mu_l)} \mu_{k-l}^{k-l} \leq$$

$$\leq \Big(\frac{\mu_l}{\overline{a}}\Big)^l e^{-M_1(\mu_l)} \mu_{k-l}^{k-l} e^{-M(\mu_{k-l})} e^{M_1(\mu_{k-l})}.$$

Зауважимо, що $\sup\limits_{z \geq 0} z^k e^{-M_1(x)} = \mu_k^k e^{-M_1(\mu_k)}$. Тоді

$$\mu_l^l e^{-M_1(\mu_l)} \mu_{k-l}^{k-l} e^{-M_1(\mu_{k-l})} = \sup_{z \geq 0} (z^l e^{-M_1(z)}) \cdot \sup_{z \geq 0} (z^{k-l} e^{-M_1(z)}) \leq$$

$$\leq \sup_{z \geq 0} (z^k e^{-M_1(z)}) = \mu_k^l e^{-M_1(\mu_k)}.$$

Отже,

$$\Lambda \leq \mu_k^k e^{-M_1(\mu_k)} \Big(\frac{1}{\overline{a}}\Big)^l e^{M_1(\mu_{k-l})} \leq \Big(\frac{1}{\overline{a}}\Big)^l e^{k-l} \mu_k^k e^{-M_1(\mu_k)};$$

тут враховано, що $e^{M_1(\mu_k)} < e^k$. Справді,

$$M_1(\mu_k) = \int\limits_0^{\mu_k} \mu_1(\xi) d\xi, \quad k \geq 1.$$

Згідно з теоремою про середнє значення маємо, що

$$\forall k \geq 1 \exists \xi_k \in (0, \mu_k): \quad M_1(\mu_k) = \mu_k \mu_1(\xi_k).$$

Функція μ_1 є зростаючою і неперервною, тому $M_1(\mu_k) < \mu_k \cdot \mu_1(\mu_k) = k$, $k \geq 1$. Отже, $\exp M_1(\mu_k) < e^k$. Таким чином,

$$|\xi^k D_\xi^n \Phi_{t,R}(\xi)| \leq \bar{\bar{c}} n! \Big(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\Big)^n (\alpha\mu_k)^k e^{\Omega_1(\rho_n) - M_1(\mu_k)} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{k} C_k^l \Big(\frac{1}{a}\Big)^l (2e)^{k-l} = \alpha_0 n! \Big(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\Big)^n (\alpha\mu_k)^k e^{\Omega_1(\rho_n) - M_1(\mu_k)}, \tag{5.18}$$

де $\alpha_0 = 2c_0 \bar{c} \tilde{c} \bar{a}^{-1}$, $\alpha = \dfrac{1}{a} + 2e$, звідки й випливає, що $\Phi_{t,R}(\xi) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t > 1$ і $R > 0$. Зауважимо також, що сталі в нерівності (5.18) не залежать від R.

Далі, не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $G(t,x) = G(t,-x)$ (або $G(t,x) = -G(t,-x)$), $x \in \mathbb{R}$, бо G завжди можна подати у вигляді суми $G_1 + G_2$, де

$$G_1(t,x) = \frac{1}{2}[G(t,x) + G(t,-x)], G_2(t,x) = \frac{1}{2}[G(t,x) - G(t,-x)].$$

Тоді $\Phi_t(\xi)$ можна подати у вигляді

$$\Phi_t(\xi) = (G(t,\cdot) * \psi)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, t > 1.$$

Отже,

$$F[\Phi_t] = F[G(t,\cdot) * \psi] = F[G(t,\cdot)] \cdot F[\psi] = Q(t,\cdot) F[\psi].$$

Якщо $\psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, то $F[\psi] \in W_M^{\Omega}(\mathbb{R})$. Крім того, як встановлено раніше, $Q(t,\cdot) \in W_M^{\Omega}(\mathbb{R})$ при кожному $t > 0$. Тоді $F[\Phi_t] \in W_M^{\Omega}(\mathbb{R})$, тобто $\Phi_t \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t > 1$. Звідси випливає також, що

$$J_{t,R}(\xi) := \Phi_t(\xi) - \Phi_{t,R}(\xi) = \int\limits_{|x|>R} G(t, x-\xi)\psi(x)dx$$

є елементом простору $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t > 1$ і $R > 0$. Далі безпосередньо переконуємося в тому, що $J_{t,R} \to 0$ при $R \to +\infty$ у просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, враховуючи при цьому, що сталі в нерівностях (5.18) не залежать від $R > 0$. Отже, властивості а), б) виконуються.

Оскільки $f \in (W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), *)'$ – згортувач у просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, то $f * \check{\psi} \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$. Звідси, зокрема, дістаємо, що

$$|(f * \check{\psi})(y)| \leq cexp\{-M_1(ay)\}, \quad y \in \mathbb{R},$$

сталі c, $a > 0$ не залежать від y. Урахувавши останню нерівність та оцінку (5.11), знайдемо, що

$$|\langle u(t,\cdot), \psi\rangle| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t,-y)| \cdot |(f * \check{\psi})(y)| dy \leq$$

$$\leq \tilde{c} d^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-M_1(ay)\} dy = \omega_0 t^{-1}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Перейшовши тут до границі при $t \to +\infty$, дістанемо, що $\langle u(t,\cdot), \psi\rangle \to 0$ при $t \to +\infty$ для довільної функції $\psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, що й потрібно було довести.

Як приклад, розглянемо рівняння (5.4) з оператором A_φ, побудованим за функцією $\varphi(x) = -x^2/2$, $x \in \mathbb{R}$. У цьому випадку $A_\varphi = \Big(-i\dfrac{d}{dx}\Big)^2/2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dx^2}$, а рівняння (5.4) – це рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t,x) \in \Omega. \tag{5.19}$$

Функція $\varphi(z) = -\dfrac{z^2}{2}$ є елементом простору P_M^Ω, де $M(x) = x^2/2$, $\Omega(y) = y^2/2$. Справді, $e^{-z^2/2} \in W_{x^2/2}^{y^2/x}$, оскільки

$$|e^{-z^2/2}| = |e^{-(x+iy)^2/2}| = e^{-x^2/2+y^2/2}.$$

Крім того, функція $-z^2/2$ – мультиплікатор у просторі $W^{y^2/2}_{x^2/2}$. Функція $Q_1(t,z) = e^{-tz^2/2}$ задовольняє умову (5.7). Внаслідок теореми 5.1 нелокальна m-точкова за часом задача для рівняння (5.19) коректно розв'язна, якщо $f \in (W^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}), *)'$, де Ω_1 та M_1 – функції, двоїсті за Юнгом до функцій M та Ω відповідно. У цьому випадку маємо $\Omega_1(y) = y^2/2$, $M_1(x) = x^2/2$ (див. приклад з п. 5.1). Отже, для рівняння (5.19) вказана задача коректно розв'язна, якщо $f \in (W^{y^2/2}_{x^2/2}(\mathbb{R}), *)'$, при цьому $u(t,x) = f * G(t,x)$, де

$$G(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{r+1}} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\dots\mu_m^{r_m}}{r_1!\dots r_m!} \frac{1}{\sqrt{\pi(\lambda,r)}} e^{-\frac{x^2}{2(\lambda,r)}},$$

де $(\lambda, r) = t_1r_1 + \dots + t_mr_m + t$. Зокрема, якщо $f = \delta \in (W^{y^2/2}_{x^2/2}(\mathbb{R}), *)'$, то $u(t,x) = G(t,x)$. Якщо $m = 1$ (випадок двоточкової задачі), $f = \delta$, то

$$u(t,x) = (\sqrt{2}\mu)^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^r \frac{1}{\sqrt{\pi(t+rt_1)}} e^{-\frac{x^2}{2(t+rt_1)}}.$$

5.3. Еволюційні рівняння із псевдодиференціальними операторами, побудованими за змінними символами

Розглянемо функцію $a(t,x;\sigma)$, задану на $[0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, яка задовольняє умови:

1) $a(t,x;\sigma)$ – неперервно диференційовна функція аргумента $t \in [0,T]$ (при фіксованих x,σ); $a(t,x;\sigma)$ – неперервно диференційовна обмежена на $\mathbb{R}$ функція аргумента x (при фіксованих t,σ);

2) при фіксованих t,x функція $a(t,x;\sigma)$, як функція змінної σ, допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину; $a(t,x;\cdot) \in P^{\Omega}_{M}$, $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \equiv$

Π_T, при цьому

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_\varepsilon > 0 \quad \forall \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : |a(t, x; \sigma + i\tau)| \leq$$

$$\leq c_\varepsilon \exp\{M(\varepsilon\sigma) + \Omega(\varepsilon\tau)\}, \ \ \forall (t, x) \in \Pi_T,$$

$$\exists c, a, b > 0 : |\exp\{a(t, x; \sigma + i\tau)\}| \leq$$

$$\leq c \exp\{-M(a\sigma) + \Omega(b\tau)\}, \ \ \forall (t, x) \in \Pi_T.$$

Вважаємо також, що функція M задовольняє умову:

$$\exists c_0 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : \quad M(x) \geq c_0|x|^\alpha,$$

де $\alpha > 2$ – фіксований параметр.

Розглянемо псевдодиференціальний оператор A, побудований за символом $a(t, x; \sigma)$:

$$(A\psi)(x) := F^{-1}_{\sigma\to x}[a(t, x; \sigma)F_{x\to\sigma}[\psi(x)](\sigma)](x), \quad \forall \psi \in W^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}),$$

де M_1, Ω_1 – функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій Ω та M. Із властивостей функції $a(t, x; \sigma)$ випливає, що $A\psi \in K(\mathbb{R})$ при кожному $t \in [0, T]$, де $K(\mathbb{R})$ – нормований простір, який складається з неперервних обмежених на $\mathbb{R}$ функцій φ з нормою $||\varphi|| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$. Оскільки перетворення Фур'є (пряме та обернене) є неперервним у просторах типу W, то звідси випливає, що A: $W^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}) \longrightarrow K(\mathbb{R})$ – лінійний і неперервний оператор. Зазначимо також (див. п. 5.1), що A можна розуміти як оператор диференціювання нескінченного порядку, тобто

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t, x)(-iD_x)^k,$$

за умови, що $a(t, x; \sigma) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(t, x)\sigma^k$ – ряд Тейлора функції-символа a за змінною σ (при фіксованих t, x).

У смузі $\Pi'_T = \{(t,x) : 0 \le \tau < t \le T,\ x \in \mathbb{R}\}$ розглянемо задачу про знаходження розв'язку еволюційного рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t = Au(t,x),\ \ (t,x) \in \Pi'_T, \tag{5.20}$$

який задовольняє умови: $u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x)$,

$$\mu \lim_{t\to\tau+0} u_1(t,x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u_1(t,x) = \varphi(x), \tag{5.21}$$

$$\lim_{t\to\tau+0} u_2(t,x) = 0, \tag{5.22}$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ для фіксованої функції $\varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, ..., \mu_m\} \subset \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, ..., t_m\} \subset (\tau, T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > m \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k$, $0 \le \tau < t_1 < \ < \ ... < t_m = T$. Задачу (5.20) – (5.22) називатимемо нелокальною за часом m-точковою (багатоточковою) задачею для рівняння (5.20).

Під фундаментальним розв'язком задачі (5.20) — (5.22) розумітимемо функцію

$$Z(t,x;\tau,\xi) = V(t,x;\tau,\xi) + \Gamma(t,x;\tau,\xi), \quad (t,x) \in \Pi'_T,$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

яка володіє властивостями:

1) $LZ(t,x;\tau,\xi) = 0$, $L \equiv L(t,x;A,\partial/\partial t) := \partial/\partial t - A$, тобто Z, як функція t, x (при фіксованих τ, ξ), є розв'язком рівняння (5.20);

2) $$\mu \lim_{t\to\tau+0} \int_{\mathbb{R}} V(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi \ -$$
$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \int_{\mathbb{R}} V(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi = \varphi(x),$$

$$\lim_{t\to\tau+0} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi = 0,$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ для довільної функції $\varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$.

Для побудови функції Z скористаємося методом Леві (методом параметрикса). З цією метою символ $a(t, x; \sigma)$ зафіксуємо у точці $(t, x) = (\chi, \xi)$, $\chi \in [\tau, T]$, $\xi \in \mathbb{R}$, і розглянемо нелокальну m-точкову задачу для еволюційного рівняння зі сталим символом $a(\chi, \xi; \sigma)$:

$$L(\chi, \xi; A, \partial/\partial t)v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi'_T, \tag{5.23}$$

$$\mu \lim_{t \to \tau+0} v(t, x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} v(t, x) = \varphi(x), \quad \varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}). \tag{5.24}$$

Розв'язок задачі (5.23), (5.24) шукатимемо за допомогою перетворення Фур'є у вигляді $v(t, x) = F[\widetilde{v}(t, \cdot)](x)$, $(t, x) \in \Pi'_T$. Для функції $\widetilde{v} : \Pi'_T \longrightarrow \mathbb{R}$ дістаємо задачу з параметром σ:

$$\frac{d\widetilde{v}(t, \sigma)}{dt} = a(\chi, \xi; \sigma)\widetilde{v}(t, \sigma), \quad (t, \sigma) \in \Pi'_T, \tag{5.25}$$

$$\mu \lim_{t \to \tau+0} \widetilde{v}(t, \sigma) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \widetilde{v}(t, \sigma) = \widetilde{\varphi}(\sigma), \tag{5.26}$$

де $\widetilde{\varphi}(\sigma) = F^{-1}[\varphi](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (5.25) має вигляд:

$$\widetilde{v}(t, \sigma) = c \exp\{(t - \tau)a(\chi, \xi; \sigma)\}, \quad (t, \sigma) \in \Pi'_T, \tag{5.27}$$

де $c = c(\sigma)$ визначається з умови (5.26). Підставивши (5.27) в (5.26), знайдемо, що

$$c = \widetilde{\varphi}(\sigma) \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{(t_k - \tau)a(\chi, \xi; \sigma)\} \right)^{-1}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Отже, формальним розв'язком задачі (5.23), (5.24) є функція

$$v(t, x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{v}(t, \sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma, \quad (t, x) \in \Pi'_T.$$

Введемо позначення: $G(t-\tau,x;\chi,\xi) = F^{-1}_{\sigma\to x}[Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)]$, де

$$Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma) = \exp\{(t_k-\tau)a(\chi,\xi;\sigma)\}\times$$
$$\times\left(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{(t_k-\tau)a(\chi,\xi;\sigma)\}\right)^{-1}.$$

Тоді, міркуючи формально, знайдемо, що

$$v(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t-\tau,x-\omega;\chi,\xi)\varphi(\omega)d\omega = G(t-\tau,x;\chi,\xi)*\varphi(x).$$

Справді,

$$v(t,x) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(\omega)e^{-i\sigma\omega}d\omega\right)e^{i\sigma x}d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\left((2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)e^{i\sigma(x-\omega)}d\sigma\right)\varphi(\omega)d\omega =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} G(t-\tau,x-\omega;\chi,\xi)\varphi(\omega)\omega^{2\nu+1}d\omega = G(t-\tau,x;\chi,\xi)*\varphi(x),$$

що й потрібно було довести. Зауважимо, що коректність проведених тут перетворень випливає з властивостей функції G, які ми наведемо нижче. Властивості функції G залежать від властивостей функції Q, оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено при доведені лем 5.1, 5.2 (див. п. 5.2), прийдемо до твердження: існують сталі $c,a,b>0$, не залежні від t,τ,x,ξ такі, що для функції Q та її похідних (за змінною σ) справджуються оцінки

$$|D^n_\sigma Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)| \le c\left(\frac{be}{\rho_n}\right)^n n!e^{-(t-\tau)M(a\sigma)},\quad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{5.28}$$

де ρ_n – розв'язок рівняння $\sigma\omega(\sigma) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\omega = \Omega'$.

Внаслідок формули Стірлінга $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\theta/(12n)}$, $0 < \theta < 1$. Тоді, використавши (5.28) та оцінку $M(\sigma) \geq c_0|\sigma|^\alpha$, $\sigma \in \mathbb{R}$, знайдемо, що

$$|D_\sigma^q Q(t-\tau, \chi; \xi, \sigma)| \leq$$

$$\leq ce\sqrt{2\pi}\sqrt{q}\left(\frac{q}{e}\right)^q \left(\frac{be}{\rho_q}\right)^q \exp\{-(t-\tau)\widetilde{c}_0|\sigma|^\alpha\}.$$

Зазначимо, що

$$\exists c_1 > 0 \quad \forall q \in \mathbb{Z}_+ : \ \frac{\sqrt{q}}{\rho_q^q} \leq c_1.$$

Тоді

$$|D_\sigma^q Q(t-\tau, \chi; \xi, \sigma)| \leq c_2 b^q q^q \exp\{-\widetilde{c}_0(t-\tau)|\sigma|^\alpha\}, \quad (5.29)$$

де $c_2 = cc_1e\sqrt{2\pi}$. Безпосередньо переконуємося в тому, що справджуються нерівності

$$|\sigma^k \exp\{-c_0'(t-\tau)|\sigma|^\alpha\}| \leq (t-\tau)^{-k/\alpha} B^k k^{k/\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

де $c_0' = \widetilde{c}_0/2$, $B = (\alpha\widetilde{c}_0{}'e)^{-1/\alpha}$. З останньої нерівності випливають оцінки

$$|\sigma^k D_\sigma^q Q(t-\tau, \chi; \xi, \sigma)| \leq$$

$$\leq c_2 B^k (t-\tau)^{-k/\alpha} k^{k/\alpha} b^q q^q \exp\{-c_0'(t-\tau)|\sigma|^\alpha\}. \quad (5.30)$$

На підставі оцінок (4.53) робимо висновок, що при $t > \tau$ функція Q, як функція аргумента σ, є елементом простору $S^1_{1/\alpha}$.

Далі скористаємося співвідношенням

$$x^q D_x^k F[\varphi](x) = i^{k+q} F\left[(\sigma^k \varphi(\sigma))^{(q)}\right] =$$

$$= i^{k+q} \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^k \varphi(\sigma))^{(q)} e^{ix\sigma} d\sigma, \quad \{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad \varphi \in S^1_{1/\alpha}.$$

Отже,

$$x^q D_x^k G(t-\tau, x; \chi, \xi) = (2\pi)^{-1}(-1)^q i^{k+q} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^k Q(t-\tau, \chi; \xi, -\sigma))^{(q)} e^{ix\sigma} d\sigma.$$

Із результатів, наведених в [22, с. 243] випливає, що подвійна послідовність $m_{kq} = k^{k/\alpha} q^q$, $\{k, q\} \subset \mathbb{Z}_+$, задовольняє нерівність

$$kq \frac{m_{k-1,q-1}}{m_{kq}} \leq \gamma(k+q), \quad \gamma > 0.$$

Тоді, застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, оцінки (5.30) похідних функції Q та останню нерівність знайдемо, що

$$|(\sigma^k Q(t-\tau, \chi; \xi, \sigma))^{(q)}| = \left| \sum_{p=0}^{q} C_q^p (\sigma^k)^{(p)} Q^{(q-p)}(t-\tau, \chi; \xi, \sigma) \right| \leq$$
$$\leq |\sigma^k Q^{(q)}(t-\tau, \chi; \xi, \sigma)| + kq|\sigma^{k-1} Q^{(q-1)}(t-\tau, \chi; \xi, -\sigma)| +$$
$$+ \frac{k(k-1)}{2} q(q-1) |\sigma^{k-2} Q^{(q-2)}(t-\tau, \chi; \xi, -\sigma)| + \ldots \leq$$
$$\leq c_2 \Big[B^k b^q m_{kq} (t-\tau)^{-k/\alpha} + kq B^{k-1} b^{q-1} m_{k-1,q-1} (t-\tau)^{-(k-1)/\alpha} +$$
$$+ \frac{k(k-1)}{2} q(q-1) B^{k-2} b^{q-2} m_{k-2,q-2} (t-\tau)^{-(k-2)/\alpha} + \ldots \Big] \times$$
$$\times e^{-c_0'(t-\tau)|\sigma|^\alpha} \leq c_2 B^k b^q m_{kq} (t-\tau)^{-k/\alpha} \left[1 + \frac{T^{1/\alpha}}{bB} kq \frac{m_{k-1,q-1}}{m_{kq}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \frac{T^{2/\alpha}}{b^2 B^2} kq \frac{m_{k-1,q-1}}{m_{kq}} (k-1)(q-1) \frac{m_{k-2,q-2}}{m_{k-1,q-1}} + \ldots \right] e^{-c_0'(t-\tau)|\sigma|^\alpha} \leq$$
$$\leq c_2 B^k b^q m_{kq} (t-\tau)^{-k/\alpha} \Big[1 + \frac{\gamma T^{1/\alpha}}{bB}(k+q) +$$

$$+\frac{\gamma^2 T^{2/\alpha}}{1\cdot 2\cdot b^2 B^2}(k+q)^2+\dots\Big]e^{-c_0'(t-\tau)|\sigma|^\alpha}\le$$
$$\le c_2 B_1^k b_1^q m_{kq}(t-\tau)^{-k/\alpha}e^{-c_0'(t-\tau)|\sigma|^\alpha}=$$
$$=c_2 B_1^k b_1^q (t-\tau)^{-k/\alpha}k^{k/\alpha}q^q e^{-c_0'(t-\tau)|\sigma|^\alpha},$$

де $B_1=Be^{\gamma T^{1/\alpha}/(bB)}$, $b_1=be^{\gamma T^{1/\alpha}/(bB)}$.

Отже,

$$|x^q D_x^k G(t-\tau,x;\chi,\xi)|\le c_2(2\pi)^{-1}B_1^k b_1^q(t-\tau)^{-k/\alpha}k^{k/\alpha}q^q\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-c_0'(t-\tau)|\sigma|^\alpha}d\sigma\le c_3 B_1^k b_1^q (t-\tau)^{-(k+1)/\alpha}k^{k/\alpha}q^q,\ \{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$|D_x^k G(t-\tau,x;\chi,\xi)|\le c_3 B_1^k(t-\tau)^{-(k+1)/\alpha}k^{k/\alpha}\inf_q\frac{b_1^q q^q}{|x|^q}\le$$
$$\le c_4 B_1^k(t-\tau)^{-(k+1)/\alpha}k^{k/\alpha}e^{-b_0|x|},\ x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}_+,$$

де $b_0=(b_1)^{-1}$.Таким чином, правильним є наступне твердження.

Лема 5.5. *Для функції G та її похідних (за змінною x) справджуються нерівності*

$$|D_x^k G(t-\tau,x;\chi,\xi)|\le c_4 B_1^k(t-\tau)^{-(k+1)/\alpha}k^{k/\alpha}e^{-b_0|x|},\quad(5.31)$$
$$k\in\mathbb{Z}_+,\quad x\in\mathbb{R},$$

сталі $c_4, B_1, b_0>0$ не залежать від $t-\tau,\chi,\xi$.

Функція

$$G(t-\tau,x;\chi,\xi)=(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}}Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma\quad(5.32)$$

є неперервною функцією аргумента $t\in(\tau,T]$. Справді, з (5.28) випливає, що для $t\ge t_0>\tau$ справджується оцінка

$$|Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)|\le c\exp\{-(t_0-\tau)c_0|\sigma|^\alpha\},\ \ \sigma\in\mathbb{R}.$$

Звідси вже дістаємо, що інтеграл (5.32) збігається рівномірно у довільній смузі $\{(t,\sigma) : \tau < t_0 \le t \le T,\ \sigma \in \mathbb{R}\}$, $t_0 > 0$, тому функція G є неперервною у кожній точці проміжку $(\tau, T]$.

Аналогічно доводимо диференційовність по t функції G. Справді, формально диференціюючи (5.32) по t, під знаком інтеграла дістанемо функцію $a(\chi,\xi;\sigma)Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)e^{-ix\sigma}$, модуль якої для $t \ge t_0$ оцінюється функцією

$$c\exp\{M(\varepsilon\sigma)-(t_0-\tau)M(a\sigma)\} \le c\exp\{M(\varepsilon\sigma)-M(a(t_0-\tau)\sigma)\} \le$$

$$\le c\exp\{-M((a(t_0-\tau)-\varepsilon)\sigma)\}, \quad 0<\varepsilon<a(t_0-\tau);$$

тут врахована умова 2), яку задовольняє функція $a(\chi,\xi;\sigma)$, оцінка (5.28), а також нерівність опуклості для функції M; вважаємо також, що $0 < t_0-\tau < 1$, при цьому справджується нерівність

$$-(t_0-\tau)M(a\sigma) \le -M(a(t_0-\tau)\sigma)$$

(див. п. 5.2). Отже, мажорантою є інтегровна функція $\exp\{-M(\overline{a}\sigma)\}$, $\overline{a} = a(t_0-\tau)-\varepsilon$, а інтеграл від похідної підінтегральної функції в (5.32) збігається рівномірно на довільному проміжку $[t_0, T]$, $t_0 > \tau$, і тому похідну під знаком інтеграла в (5.32) можна застосувати в кожній точці $t \in (\tau, T]$. Зазначимо також, що функція $\partial G/\partial t$ є неперервною по t функцією (при фіксованому x).

Лема 5.6. *Функція G, як абстрактна функція параметра $t \in (\tau, T]$ із значеннями в просторі $S_1^{1/\alpha}$, диференційовна по t.*

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S випливає, що для доведення леми досить встановити, що функція $F[G(t-\tau,\cdot,\cdot,\cdot)] = Q(t-\tau,\cdot,\cdot,\cdot)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $F[S_1^{1/\alpha}] =$

$S^1_{1/\alpha}$, диференційовна по t. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}[Q(t+\Delta t-\tau,\chi;\xi,\sigma) - Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)] \longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma), \ \ \Delta t \to 0,$$

виконується в тому розумінні, що

1) $D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} D^s_\sigma(a(\chi,\xi;\sigma)Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma))$, $s \in \mathbb{Z}_+$, рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$;

2) $|D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \overline{c}\overline{B}^s s^s e^{-\overline{a}|\sigma|^\alpha}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, де сталі $\overline{c}, \overline{a}, \overline{b} > 0$ не залежать від Δt, якщо Δt досить мале.

Функція $Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)$ диференційовна по t у звичайному розумінні, тому, внаслідок теореми Лагранжа про скінченні прирости,

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = a(\chi,\xi;\sigma)Q(t-\tau+\theta\Delta t,\chi;\xi,\sigma), 0<\theta<1, t+\theta\Delta t \leq T.$$

Отже,

$$D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) = \sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_\sigma a(\chi,\xi;\sigma) D^{s-l}_\sigma Q(t-\tau+\theta\Delta t,\chi;\xi,\sigma);$$

і

$$D^s_\sigma\left(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_\sigma a(\chi,\xi;\sigma)[D^{s-l}_\sigma Q(t-\tau+\theta\Delta t,\chi;\xi,\sigma) -$$

$$-D^{s-l}_\sigma Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)].$$

Оскільки

$$D^{s-l}_\sigma Q(t-\tau+\theta\Delta t,\chi;\xi,\sigma) - D^{s-l}_\sigma Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma) =$$

$$= D_\sigma^{s-l+1} Q(t-\tau+\theta_1\Delta t,\chi;\xi,\sigma)\theta\Delta t, \quad 0<\theta_1<1,$$

то звідси та з оцінок (5.28) випливає, що

$$D_\sigma^{s-l+1} Q(t-\tau+\theta_1\Delta t,\chi;\xi,\sigma)\theta\Delta t \longrightarrow 0, \quad \Delta t\to 0,$$

рівномірно на кожному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Тоді і

$$D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) \longrightarrow D_\sigma^s\left(\frac{\partial}{\partial t} Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)\right)$$

при $\Delta t\to 0$ рівномірно на довільному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Отже, умова 1) виконується.

Оскільки $a(\chi,\xi;\sigma)$, як функція σ, – мультиплікатор у просторі W_M^Ω (див. умову 2)), то

$$\forall\varepsilon>0\ \exists c_\varepsilon>0\ \forall\sigma+i\tau\in\mathbb{C}: |a(\chi,\xi;\sigma)|\le c_\varepsilon e^{M(\varepsilon\sigma)+\Omega(\varepsilon\tau)}, \qquad (5.33)$$
$$\forall(\chi,\xi)\in\Pi_T.$$

Внаслідок інтегральної формули Коші, маємо, що

$$D_\sigma^n a(\chi,\xi;\sigma) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{a(\chi,\xi;z)}{(z-\sigma)^{n+1}}dz, \ \ n\in\mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром в точці $\sigma\in\mathbb{R}$. Тоді, скориставшись (5.33), знайдемо, що

$$|D_\sigma^n a(\chi,\xi;\sigma)|\le c_\varepsilon\frac{n!}{R^n}e^{M(\varepsilon(\sigma+R))+\Omega(\varepsilon R)}\le c_\varepsilon n!\inf_R\frac{e^{\Omega(\varepsilon R)}}{R^n}\times$$
$$\times e^{M(\varepsilon(\sigma+R))} = c_\varepsilon\varepsilon^n\rho_n^{-n}n!e^{\Omega(\rho_n)}e^{M(\varepsilon(\sigma+R))}\le$$
$$\le\widetilde{c}_\varepsilon(2e\varepsilon)^n n^n e^{M(\varepsilon(\sigma+R))}, \quad \sigma\ge 0,$$

де ρ_n – розв'язок рівняння $\sigma\omega(\sigma)=n$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $\omega=\Omega'$ (тут враховано, що послідовність ρ_n^{-1} є монотонно спадною).

При достатньо великих значеннях $\sigma > 0$ справджується нерівність $\varepsilon(\sigma+R) \leq (\varepsilon+R)\sigma$. Оскільки функція M монотонно зростає на $[0,+\infty)$, то при цих же значеннях σ маємо, що $M(\varepsilon(\sigma+R)) \leq M((\varepsilon+R)\sigma)$. Для всіх $\sigma \geq 0$ справджується нерівність $M(\varepsilon(\sigma+R)) \leq \leq M((\varepsilon+R)\sigma) + c_R$. Отже, для $\sigma \geq 0$

$$e^{M(\varepsilon(\sigma+R))} \leq \widetilde{c_R} e^{M((\varepsilon+R)\sigma)}.$$

Далі, при заданому $\varepsilon > 0$ вважатимемо, що $R = \varepsilon$. Тоді

$$|D_\sigma^n a(\chi, \xi; \sigma)| \leq \widetilde{c}_\varepsilon (2e\varepsilon)^n n^n e^{M(2\varepsilon\sigma)}, \;\; n \in \mathbb{Z}_+, \tag{5.34}$$

Урахувавши (5.34), (5.28) та (5.29), знайдемо, що

$$|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \sum_{l=0}^{s} C_s^l |D_\sigma^l a(\chi,\xi;\sigma)| \cdot |D_\sigma^{s-l} Q(t-\tau+\theta\Delta t, \chi; \xi, \sigma)| \leq$$

$$\leq c_2 \widetilde{c}_\varepsilon \sum_{l=0}^{s} C_s^l B^l l^l (2e\varepsilon)^{s-l} (s-l)^{s-l} e^{M(2\varepsilon\sigma)-(t-\tau+\theta\Delta t)M(a\sigma)} \leq$$

$$\leq \overline{c}\,\overline{B}^s s^s e^{M(2\varepsilon\sigma)-(t-\tau)M(a\sigma)},$$

де $\overline{c} = c_2 \widetilde{c}_\varepsilon$, $\overline{B} = 2\max\{B, 2e\varepsilon\}$. Вважаємо, що $0 < t - \tau < 1$. Тоді $-(t-\tau)M(a\sigma) \leq \leq -M((t-\tau)a\sigma)$ (випадок $t - \tau \geq 1$ зводиться до попереднього). Візьмемо $\varepsilon = \dfrac{a}{4}(t - \tau)$. Скориставшись нерівністю опуклості для функції M, знайдемо, що

$$M(2\varepsilon\sigma) - M(a(t-\tau)\sigma) \leq -M(a(t-\tau) - 2\varepsilon)\sigma = M(a_1\sigma),$$

$$a_1 = \frac{a}{2}(t-\tau) > 0.$$

Тоді

$$|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \overline{c}\,\overline{B}^s s^s e^{-M(a_1\sigma)} \leq \overline{c}\,\overline{B}^s s^s e^{-\overline{a}|\sigma|^\alpha}, \overline{a} = c_0|a_1|^\alpha, \sigma \geq 0,$$

причому сталі $\overline{c}, \overline{a}, \overline{B} > 0$ не залежать від Δt (для досить малих значень Δt). Випадок $\sigma < 0$ розглядається аналогічно. Таким чином, умова 2) також виконується. Лема доведена.

Оскільки $S_1^{1/\alpha} \subset S_1^1$, $\alpha > 1$, то з леми 5.6 випливає, що G, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі S_1^1, диференційовна по t.

Лема 5.7. *У просторі* $\left(S_1^{1/\alpha}\right)'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to\tau+0} G(t-\tau, x; \tau, \xi) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} G(t-\tau, x; \tau, \xi) = \delta. \quad (5.35)$$

Доведення. Скориставшись властивістю неперервності перетворення Фур'є та функції G, як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $S_1^{1/\alpha}$, співвідношення (5.35) замінимо граничним співвідношенням

$$\mu \lim_{t\to\tau+0} F[G(t-\tau, \cdot; \tau, \xi)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} F[G(t-\tau, \cdot; \tau, \xi)] = F[\delta] \quad (5.36)$$

у просторі $\left(S^1_{1/\alpha}\right)'$. Урахувавши зображення функції G, (5.36) подамо у вигляді

$$\mu \lim_{t\to\tau+0} Q(t-\tau, \tau; \xi, \cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} Q(t-\tau, \tau; \xi, \cdot) = 1. \quad (5.37)$$

Для доведення (5.37) візьмемо довільну функцію $\varphi \in S^1_{1/\alpha}$ і, скориставшись теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо що

$$\mu \lim_{t\to\tau+0} < Q(t-\tau, \tau; \xi, \cdot), \varphi > -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} < Q(t-\tau, \tau; \xi, \cdot), \varphi >=$$

$$= \mu \lim_{t\to\tau+0} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t-\tau,\tau;\xi,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t-\tau,\tau;\xi,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\mu Q_2(\tau,\tau;\xi,\sigma) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k-\tau,\tau;\xi,\sigma) Q_2(\tau,\tau;\xi,\sigma) \right) \times$$

$$\times \varphi(\sigma)d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k-\tau,\tau;\xi,\sigma) \right) Q_2(\tau,\tau;\xi,\sigma) \times$$

$$\times \varphi(\sigma)d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\sigma)d\sigma = < 1, \varphi >;$$

тут

$$Q_1(t-\tau,\tau;\xi,\sigma) = \exp\{(t-\tau)a(\tau;\xi,\sigma)\},$$

$$Q_2(\tau,\tau;\xi,\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k-\tau,\tau;\xi,\sigma) \right)^{-1},$$

$$Q(t-\tau,\tau;\xi,\sigma) = Q_1(t-\tau,\tau;\xi,\sigma) Q_2(\tau,\tau;\xi,\sigma);$$

$Q(t-\tau,\tau;\xi,\cdot)$ розуміємо як регулярну узагальнену функцію з простору $\left(S^1_{1/\alpha}\right)'$. Звідси вже випливає, що співвідношення (5.37) виконується в просторі $\left(S^1_{1/\alpha}\right)'$, а отже, правильним є співвідношення (5.35).

Зауважимо, що оскільки $S_1^{1/\alpha} \subset S_1^1 \subset (S_1^1)' \subset \left(S_1^{1/\alpha}\right)'$, то (5.35) виконується і в просторі $(S_1^1)'$.

Лема доведена.

Нехай $G_0 = G(t-\tau,x;\tau,0)$, $\varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}) \subset S_1^1$. Скориставшись властивістю неперервності перетворення Фур'є в просторах типу S та формулою

$$F[\varphi * G_0] = F[\varphi] \cdot F[G_0] = F[\varphi] \cdot Q_0, \quad Q_0 = Q(t-\tau,\tau;0,\sigma),$$

знайдемо, що

$$\mu \lim_{t\to\tau+0} F[\varphi * G_0] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} F[\varphi * G_0] =$$

$$= F[\varphi] \left(\mu \lim_{t\to\tau+0} Q_0 - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} Q_0 \right).$$

Урахувавши співвідношення (5.37), яке справджується для кожного $\xi \in \mathbb{R}$, зокрема і для $\xi = 0$, знайдемо, що

$$\mu \lim_{t\to\tau+0} F[\varphi * G_0] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} F[\varphi * G_0] = F[\varphi].$$

Отже,

$$\mu \lim_{t\to\tau+0} (\varphi * G_0) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} (\varphi * G_0) = \varphi.$$

Оскільки, з іншого боку,

$$\varphi * G_0 = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t-\tau, x-\xi; \tau, 0)\varphi(\xi) d\xi,$$

то для довільної функції $\varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}) \subset S_1^1$ справджується співвідношення

$$\mu \lim_{t\to\tau+0} \int\limits_{\mathbb{R}} G(t-\tau, x-\xi; \tau, 0)\varphi(\xi) d\xi -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \int\limits_{\mathbb{R}} G(t-\tau, x-\xi; \tau, 0)\varphi(\xi) d\xi = \varphi(x) \qquad (5.38)$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

Зазначимо, що з (5.38) випливає також співвідношення

$$\mu \lim_{t \to \tau+0} \int_{\mathbb{R}} G(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)\varphi(\xi)d\xi -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \int_{\mathbb{R}} G(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)\varphi(\xi)d\xi = \varphi(x) \qquad (5.39)$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ для довільної функції $\varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$.

Справді, оскільки

$$\int_{\mathbb{R}} G(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)\varphi(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} G(t-\tau, x-\xi; \tau, 0)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\int_{\mathbb{R}} [G(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi) - G(t-\tau, x-\xi; \tau, 0)]\varphi(\xi)d\xi;$$

то для доведення (5.39) досить встановити, що

$$\mu \lim_{t \to \tau+0} \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)\varphi(\xi)d\xi -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \int_{\mathbb{R}} \Phi(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)\varphi(\xi)d\xi = 0, \qquad (5.40)$$

де

$$\Phi(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi) = G(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi) - G(t-\tau, x-\xi; \tau, 0).$$

Оскільки $\varphi \in S_1^{1/\alpha}$, то правильним є співвідношення

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)\varphi(\xi)d\xi = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} [Q(t-\tau, \tau; \xi, \sigma) -$$

$$-Q(t-\tau, \tau; 0, \sigma)]\varphi(\xi)e^{i\xi\sigma}d\xi \Big) e^{-ix\sigma}d\sigma. \qquad (5.41)$$

Урахувавши (5.41), співвідношення (5.37), яке справджується для довільного $\xi \in \mathbb{R}$, прийдемо до (5.39).

Зауважимо також, що граничне співвідношення (5.35) виконується і в просторі $(S_1^1)'$.

Із наведених вище результатів випливає також, що $G(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)$, як функція t, x (при фіксованих τ, ξ), є розв'язком рівняння (5.20). Отже, за функцію $V(t, x; \tau, \xi)$ можна взяти $G(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)$.

Нехай

$$I(t, \tau, x) := \int_{\tau}^{t} d\mu \int_{\mathbb{R}} G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)\varphi(\mu, \xi) d\xi, \quad (5.42)$$

де $\varphi(t, x)$ – функція, задана на $[0, T] \times \mathbb{R}$, неперервна по t, $\varphi(t, \cdot) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t \in [0, T]$. У наступному твердженні дається формула застосування оператора $\partial/\partial t$ до інтеграла (5.42)).

Лема 5.8. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial I(t, \tau, x)}{\partial t} = \int_{\tau}^{t} d\mu \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)\varphi(\mu, \xi) d\xi + \varphi(t, x). \quad (5.43)$$

Доведення. Розглянемо сім'ю функцій $\{I_h(t, \tau, x),\ 0 < h < t-\tau\}$, де

$$I_h(t, \tau, x) = \int_{\tau}^{t-h} d\mu \int_{\mathbb{R}} G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)\varphi(\mu, \xi) d\xi \equiv$$

$$\equiv \int_{\tau}^{t-h} g(t, \mu, x) d\mu,$$

$$g(t, \mu, x) = \int_{\mathbb{R}} G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)\varphi(\mu, \xi) d\xi.$$

Застосувавши правило Лопіталя диференціювання інтегралів, залежних від параметра, знайдемо, що

$$\frac{\partial I_h(t,\tau,x)}{\partial t} = \int\limits_{\tau}^{t-h} \frac{\partial}{\partial t} g(t,\mu,x)d\mu + g(t,t-h,x) =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t-h} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x-\xi;\mu,\xi)\varphi(\mu,\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}} G(h, x-\xi; t-h,\xi)\varphi(t-h,\xi)d\xi.$$

Доведемо, що $\{I_h,\ 0<h<t-\tau\}$ збігається при $h\to 0$ до функції $I(t,\tau,x)$, а $\left\{\dfrac{\partial I_h}{\partial t},\ 0<h<t-\tau\right\}$ збігається при $h\to 0$ рівномірно відносно t до правої частини (5.43). Тоді, скориставшись відповідною теоремою з математичного аналізу, дістанемо, що функція $I(t,\tau,x)$ є диференційовною по t, при цьому справджується рівність (5.43).

З леми 5.5 (див. (5.31)) випливає оцінка

$$|G(t-\mu, x-\xi;\mu,\xi)| \le c_0(t-\mu)^{-1/\alpha}\exp\{-b_0|x-\xi|\}.$$

Оскільки $\sup\limits_{\mu\in[0,T]} |\varphi(\mu,\xi)| \le c$, $\forall \xi\in\mathbb{R}$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |G(t-\mu,x-\xi;\mu,\xi)|\cdot|\varphi(\mu,\xi)|d\xi \le$$

$$\le \widetilde{c}(t-\mu)^{-1/\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-b_0|x-\xi|\}d\xi = c'(t-\mu)^{-1/\alpha},$$

$$c' = \widetilde{c}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-b_0|z|\}dz \equiv 2\widetilde{c}b_0^{-1}.$$

Звідси дістаємо, що

$$|I_h(t,\tau,x) - I(t,\tau,x)| \leq c' \int\limits_{t-h}^{t} (t-\mu)^{-1/\alpha} d\mu = \frac{h^{1-1/\alpha}}{1-1/\alpha},$$

$$1 - 1/\alpha > 0, \quad (\alpha > 2),$$

тобто $\lim\limits_{h\to 0} I_h(t,\tau,x) = I(t,\tau,x)$.

Нехай

$$\beta_h(t,x) := \int\limits_{\tau}^{t-h} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)\varphi(\mu,\xi) d\xi,$$

$$\beta(t,x) := \int\limits_{\tau}^{t} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)\varphi(\mu,\xi) d\xi.$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi) =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} a(\mu,\xi;\sigma) Q(t-\mu,\mu;\xi,\sigma) e^{-i\sigma(x-\xi)} d\sigma,$$

то, врахувавши методику встановлення оцінки функції $|G|$ (див. доведення леми 5.5), а також властивості функції-символа a (див. умову 2)), знайдено, що

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi) \right| \leq c_0'(t-\mu)^{-1/\alpha} \exp\{-\overline{a}|x-\xi|\}, \tag{5.44}$$

де сталі $c_0', \overline{a} > 0$ не залежать від μ, ξ; при цьому при оцінці підінтегрального виразу $\Lambda := |a(\mu,\xi;\sigma)Q(t-\mu,\mu;\xi,\sigma)|$ справджується нерівність

$$\Lambda \leq \widetilde{b} \exp\{M(\varepsilon\sigma) - M(a(t-\mu)\sigma)\},$$

де $\varepsilon > 0$ – довільно фіксований параметр. Із властивості опуклості функції M випливають нерівності

$$\exp\{M(\varepsilon\sigma) - M(a(t-\mu)\sigma)\} \leq \exp\{-M((a_1(t-\mu)-\varepsilon)\sigma)\} =$$

$$= \exp\left\{-M\left(\frac{a_1}{2}(t-\mu)\sigma\right)\right\} \leq \exp\{-d_0(t-\mu)|\sigma|^{\alpha}\},$$

якщо покласти $\varepsilon = \dfrac{a_1}{2}(t-\mu)$. Далі доведення оцінки (5.44) здійснюється за схемою доведення оцінки для $|G|$.

Урахувавши (5.44), а також нерівність $\sup\limits_{\mu,\xi}|\varphi(\mu,\xi)| \leq c$, знайдемо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial}{\partial t}G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)\right| \cdot |\varphi(\mu,\xi)| d\xi \leq L(t-\mu)^{-1/\alpha},$$

де стала $L > 0$ не залежать від t, μ, x. Звідси випливає, що

$$|\beta_h(t,x) - \beta(t,x)| \leq L \int\limits_{t-h}^{t} (t-\mu)^{-1/\alpha} d\mu = \frac{Lh^{1-1/\alpha}}{1-1/\alpha} \longrightarrow 0$$

при $h \to 0$ рівномірно відносно t.

Із результатів, наведених у лемі 5.5 випливає, що для функції $G(h, x-\xi; t-h, \xi)$ правильною є оцінка

$$|G(h, x-\xi; t-h, \xi)| \leq ch^{-1/\alpha} \exp\{-b_0|x-\xi|\},$$

яка є рівномірною відносно t. Звідси, із співвідношення (5.39) (у якому слід вважати $\mu = 1$, $\mu_1 = ... = \mu_m = 0$) та властивості неперервності функції $\varphi(t,x)$ за змінною t, випливає, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}} G(h, x-\xi; t-h, \xi)\varphi(t-h, \xi) d\xi \longrightarrow \varphi(t,x), \quad h \to 0,$$

рівномірно відносно t. Цим доведено, що сім'я функцій $\left\{\dfrac{\partial I_h}{\partial t},\ 0 < h < t-\tau\right\}$ збігається при $h \to 0$ рівномірно відносно t до правої частини (5.43).

Лема доведена.

Надалі оператор A у рівнянні (5.20) розумітимемо як оператор, який діє з простору X в $K(\mathbb{R})$, де символом X позначатимемо простір, який складається з функцій $\psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ з нормою $||\psi|| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\psi(x)|$.

Лема 5.9. *Нехай $\varphi(t,x)$, $(t,x) \in [0,T] \in \mathbb{R}$, – функція, неперервна за змінною t, $\varphi(t,\cdot) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$. Правильною є формула*

$$AI(t,\tau,x) = \int\limits_{\tau}^{t} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}} AG(t-\mu, x-\xi;\mu,\xi)\varphi(\mu,\xi)d\xi. \quad (5.45)$$

Доведення. Зазначимо, що I_h та I, як функції x, є елементами простору X. Ця властивість випливає із співвідношення

$$G(t-\mu, x-\xi;\mu,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t-\mu,\mu;\xi,\sigma)e^{i\sigma\xi}e^{-i\sigma x}d\sigma =$$

$$= F^{-1}_{\sigma\to x}[Q(t-\mu,\mu;\xi,\sigma)e^{i\sigma\xi}]$$

та властивостей функції Q. Доведемо, що сім'я функцій

$$\widetilde{I}_h(t,\tau,x) = I(t,\tau,x) - I_h(t,\tau,x) =$$

$$= \int\limits_{t-h}^{t} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}} G(t-\mu, x-\xi;\mu,\xi)\varphi(\mu,\xi)d\xi$$

збігається до нуля при $h \to 0$ рівномірно на $\mathbb{R}$, тобто, за топологією простору X. Урахувавши нерівність (5.31) (при

$k=0$), знайдемо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)||\varphi(\mu,\xi)|d\xi \leq c(t-\mu)^{-1/\alpha}\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-b_0|x-\xi|\}d\xi = \widetilde{c}(t-\mu)^{-1/\alpha}.$$

Тоді

$$|\widetilde{I}_h(t,\tau,x)| \leq \widetilde{c} \int\limits_{t-h}^{t} (t-\mu)^{-1/\alpha}d\mu = c_1 h^{1-1/\alpha} \longrightarrow 0, \quad h\to 0,$$

рівномірно відносно $x\in\mathbb{R}$, що й потрібно було довести.

Оскільки $A : X \longrightarrow K(\mathbb{R})$ – лінійний неперервний оператор, $I_h \longrightarrow I$, при $h\to 0$ в X, то $AI_h \longrightarrow AI$ при $h\to 0$ в просторі $K(\mathbb{R})$.

З іншого боку,

$$AI_h(t,\tau,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}[a(t,x;\sigma)F_{x\to\sigma}[I_h]] =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t-h} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}} AG(t-\mu, x-\xi;\mu,\xi)\varphi(\mu,\xi)d\xi$$

(перетворення Фур'є тут під знаком інтеграла застосовне). Зазначимо, що

$$AG(t-\mu, x-\xi;\mu,\xi) = F^{-1}_{\sigma\to x}[a(t,x;\sigma)Q(t-\mu,\mu;\xi,\sigma)e^{i\sigma\xi}].$$

Тоді

$$AI_h(t,\tau,x) = \int\limits_{\tau}^{t-h} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}} AG(t-\mu, x-\xi;\mu,\xi)\varphi(\mu,\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\tau}^{t-h} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} a(t,x;\sigma) Q(t-\mu,\mu;\xi,\sigma) e^{-i\sigma(x-\xi)} d\sigma \right) \times$$

$$\times \varphi(\mu,\xi) d\xi.$$

Введемо позначення:

$$\Lambda := \int\limits_{\tau}^{t} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}} AG(t-\mu, x-\xi; \mu,\xi) \varphi(\mu,\xi) d\xi - AI_h(t,\tau,x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{t-h}^{t} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} a(t,x;\sigma) Q(t-\mu,\mu;\xi,\sigma) e^{-i\sigma(x-\xi)} d\sigma \right) \times$$

$$\times \varphi(\mu,\xi) d\xi.$$

Нагадаємо, що функції Q та a задовольняють нерівності

$$|Q(t-\mu,\mu;\xi,\sigma)| \le c e^{-(t-\mu)M(a\sigma)}, \quad |a(t,x;\sigma)| \le c_{\varepsilon} e^{M(\varepsilon\sigma)},$$

де $\varepsilon > 0$ – довільно фіксований параметр.

Тоді

$$|a(t,x;\sigma) Q(t-\mu,\mu;\xi,\sigma) e^{-i\sigma(x-\xi)}| \le \widetilde{c} e^{M(\varepsilon\sigma)-(t-\mu)M(a\sigma)}.$$

Із властивості опуклості функції M випливає оцінка $M(\varepsilon\sigma) \le \dfrac{1}{p} M(\varepsilon p\sigma)$, $p \in \mathbb{N}$. Передусім підберемо $p \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувалась нерівність $\dfrac{1}{p} \le t-\mu$. Далі візьмемо $\varepsilon > 0$ таке, що $\varepsilon p < a$, тобто $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{a}{p}\right)$. Тоді

$$\exp\{-(t-\mu)M(a\sigma) + M(\varepsilon\sigma)\} \le \exp\{-(t-\mu)M(a\sigma) +$$

$$+ \frac{1}{p} M(\varepsilon p\sigma)\} \le \exp\{(t-\mu)(M(\varepsilon p\sigma) - M(a\sigma))\}.$$

Із нерівності опуклості для функції M випливає, що

$$M(\varepsilon p\sigma) - M(a\sigma) \le -M((a-\varepsilon p)\sigma) \equiv -M(\overline{a}\sigma).$$

Тоді

$$e^{M(\varepsilon\sigma)-(t-\mu)M(a\sigma)} \le e^{-(t-\mu)M(\overline{a}\sigma)} \le e^{-\widetilde{c}_0(t-\mu)|\sigma|^\alpha}.$$

Урахувавши останню нерівність, знайдемо, що

$$|\Lambda| \le \widetilde{c} \int\limits_{t-h}^{t} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\widetilde{c}_0(t-\mu)|\sigma|^\alpha} d\sigma \right) |\varphi(\mu,\xi)| d\xi \le$$

$$\le \widetilde{c} \int\limits_{t-h}^{t} (t-\mu)^{1/\alpha} d\mu = c' h^{1-1/\alpha} \longrightarrow 0,\ h \to 0,$$

де $c' = \widetilde{c}(1-1/\alpha)\gamma$, $\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\widetilde{c}_0|y|^\alpha} dy \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} \sup\limits_{\mu\in[0,T]} |\varphi(\mu,\xi)| d\xi <$ $+\infty$. Отже,

$$AI_h(t,\tau,x) \longrightarrow \int\limits_{\tau}^{t} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}} AG(t-\mu, x-\xi; \mu,\xi)\varphi(\mu,\xi) d\xi$$

при $h \to 0$ за топологією простору $K(\mathbb{R})$. Із властивості єдиності границі випливає (5.45). Твердження доведено.

На підставі лем 5.8 та 5.9 робимо висновок, що при вказаних обмеженнях на функцію φ правильною є формула

$$LI(t,\tau,x) = \int\limits_{\tau}^{t} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}} LG(t-\mu, x-\xi; \mu,\xi)\varphi(\mu,\xi) d\xi + \varphi(t,x). \tag{5.46}$$

Лема 5.10. *Правильною є нерівність*

$$|AG(t-\mu, x-\xi; \mu,\xi)| \le c(t-\mu)^{-1/\alpha} \exp\{-a|x-\xi|\},\ t > \mu \ge 0, \tag{5.47}$$

сталі $c, a > 0$ не залежать від t, μ.

Доведення. Скористаємося формулами

$$AG(t-\mu, y; \mu, \xi) = F^{-1}_{\sigma \to y}[a(t, x; \sigma) Q(t-\mu, \mu; \xi, \sigma)], \quad y = x - \xi,$$

$$y^k F[\varphi] = i^k F[\varphi^{(k)}] = i^k \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^{(k)}(\sigma) e^{iy\sigma} d\sigma, k \in \mathbb{Z}_+, \; y \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$y^k AG(t-\mu, y; \mu, \xi) =$$
$$= (2\pi)^{-1} i^k \int\limits_{\mathbb{R}} D^k_\sigma (a(t, x; -\sigma) Q(t-\mu, \mu; \xi, -\sigma)) d\sigma.$$

Застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, знайдемо, що

$$\Lambda_k := |D^k_\sigma (a(t, x; -\sigma) Q(t-\mu, \mu; \xi, -\sigma))| \leq$$
$$\leq \sum_{p=0}^{k} C^p_k |D^p_\sigma a(t, x; -\sigma)| \cdot |D^{k-p}_\sigma Q(t-\mu, \mu; \xi, -\sigma)|.$$

Урахувавши оцінки (5.34), (5.29) похідних функцій Q та a, знайдемо, що

$$\Lambda_k \leq c(\varepsilon) \sum_{p=0}^{k} C^p_k \varepsilon^p p^p B^{k-p} (k-p)^{(k-p)} e^{M(\varepsilon\sigma) - (t-\mu) M(a\sigma)} \leq$$
$$\leq c(\varepsilon) L^k k^k e^{M(\varepsilon\sigma) - (t-\mu) M(a\sigma)}, \quad L = 2 \max\{\varepsilon, B\},$$

$\varepsilon > 0$ – довільно фіксоване. Аналогічно тому, як це зроблено при доведенні леми 5.9 встановлюємо, що

$$e^{M(\varepsilon\sigma) - M(a\sigma)} \leq e^{\widetilde{c}_0 (t-\mu) |\sigma|^\alpha}.$$

Отже,

$$|y^k AG(t-\mu, y; \mu, \xi)| \leq c(\varepsilon) L^k k^k \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\widetilde{c}_0 (t-\mu) |\sigma|^\alpha} d\sigma =$$

$$= c_1(t-\mu)^{-1/\alpha} L^k k^k,$$

$$c_1 = c(\varepsilon)\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-\widetilde{c_0}|z|^\alpha\}dz < \infty.$$

Звідси дістаємо нерівності

$$|AG(t-\mu, y; \mu, \xi)| \leq c_1(t-\mu)^{-1/\alpha} \inf_k \frac{L^k k^k}{|y|^k} \leq$$

$$\leq \widetilde{c_1}(t-\mu)^{-1/\alpha}\exp\{-a_0|y|^k\} \leq \widetilde{c_1}(t-\mu)^{-1/\alpha}\exp\{-a_0|x-\xi|\},$$

сталі $\widetilde{c_1}, a_0 > 0$ не залежать від t, μ, $t > \mu$. Лема доведена.

Урахувавши оцінки (5.44) та (5.47), прийдемо до такого твердження: *функція LG задовольняє нерівність*

$$|LG(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)| \leq c(t-\tau)^{-1/\alpha}\exp\{-a|x-\xi|\}, \quad (5.48)$$

де сталі $c, a > 0$ не залежать від t, τ, $t > \tau$.

Перейдемо до побудови фундаментального розв'язку багатоточкової задачі для рівняння (5.20); цей розв'язок шукаємо у вигляді суми:

$$Z(t, x; \tau, \xi) = G(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi) + \Gamma(t, x; \tau, \xi), \quad (t, x) \in \Pi'_T, \quad (5.49)$$

де

$$\Gamma(t, x; \tau, \xi) = \int\limits_\tau^t d\mu \int\limits_{\mathbb{R}} G(t-\mu, x-\eta; \mu, \eta)\Phi(\mu, \eta; \tau, \xi)d\eta, \quad (5.50)$$

G – функція, визначена раніше. Функцію $\Phi(t, x; \tau, \xi)$ підберемо так, щоб Z, як функція t, x, задовольняла рівняння (5.20). Застосувавши до Z оператор L та врахувавши при цьому формули (5.43), (5.45), знайдемо, що це буде тоді й лише тоді, коли

$$\Phi(t, x; \tau, \xi) = K(t-\tau, x; \tau, \xi) +$$

$$+\int_{\tau}^{t} d\mu \int_{\mathbb{R}} K(t-\mu, x; \mu, \eta)\Phi(\mu, \eta; \tau, \xi) d\eta, \tag{5.51}$$

де $K(t-\tau, x; \tau, \xi) = -LG(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)$. Ряд

$$\Phi(t, x; \tau, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t-\tau, x; \tau, \xi), \quad K_1 = K, \tag{5.52}$$

$$K_m(t-\tau, x; \tau, \xi) = \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}} K(t-\beta, x; \beta, \eta) \times$$
$$\times K_{m-1}(\beta-\tau, \eta; \tau, \xi) d\eta,$$

є формальним розв'язком інтегрального рівняння (5.51). Ряд (5.52) дослідимо на абсолютну та рівномірну збіжність при $0 < \delta_0 \le t-\tau \le T$. Для обґрунтування збіжності цього ряду здійснимо оцінку повторних ядер K_m. Зазначимо, що для $|K_1| = |LG|$ справджується нерівність (5.48). Для оцінки ядра K_2 скористаємося наступним допоміжним твердженням.

Нехай

$$I(x, \xi) := \int_{\mathbb{R}} \exp\{-a(|x-y| + |y-\xi|)\} dy, a > 0.$$

Для інтеграла I справджується нерівність

$$I(x, \xi) \le c(\varepsilon) \exp\{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|\}, \tag{5.53}$$

де $0 < \varepsilon < 1$ – фіксований параметр, $c(\varepsilon) = 2a^{-1}\varepsilon^{-1}$.

Справді, розглянемо функцію $\varphi(y) = |x-y| + |y-\xi|$. Безпосередньо переконуємося в тому, що вона задовольняє нерівність $\varphi(y) \ge |x-\xi|$. Зафіксуємо $0 < \varepsilon < 1$. Тоді

$$I(x, \xi) = \exp\{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|\} \int_{\mathbb{R}} e^{-a\varepsilon\varphi(y)} dy =$$

$$= \exp\{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|\} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a\varepsilon|y-\xi|}dy = c(\varepsilon)\exp\{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|\},$$

де $c(\varepsilon) = a^{-1}\varepsilon^{-1}$.

Урахувавши (5.48) та (5.53), оцінимо ядро K_2:

$$K_2(t-\tau, x; \tau, \xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}} K(t-\beta, x; \beta, \eta) K_1(\beta-\tau, \eta; \tau, \xi) d\eta.$$

Отже,

$$|K_2(t-\tau, x; \tau, \xi)| \le \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}} |K(t-\beta, x; \beta, \eta)||K_1(\beta-\tau, \eta; \tau, \xi)| d\eta \le$$

$$\le c^2 \int\limits_{\tau}^{t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} (t-\beta)^{-\lambda}(\beta-\tau)^{-\lambda} e^{-a(|x-\eta|+|\eta-\xi|)} d\eta \right) d\beta \le$$

$$\le c^2 \int\limits_{\tau}^{t} (t-\beta)^{-\lambda}(\beta-\tau)^{-\lambda} d\beta \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a(|x-\eta|+|\eta-\xi|)} d\eta \le$$

$$\le c^2 c(\varepsilon)(t-\tau)^{1-2\lambda} B(1-\lambda, 1-\lambda) \exp\{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|\}, \lambda = 1/\alpha; \tag{5.54}$$

тут використана формула

$$\int\limits_{a}^{b} (t-a)^{x-1}(b-t)^{y-1} dt = (b-a)^{x+y-1} B(x, y),$$

$$\operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0,$$

$B(\cdot, \cdot)$ – бета-функція.

Урахувавши (5.54), оцінимо ядро K_3:

$$|K_3(t-\tau, x; \tau, \xi)| \le \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}} |K(t-\beta, x; \beta, \eta)| \times$$

$$\times|K_2(\beta-\tau,\eta;\tau,\xi)|d\eta \le c^3 c(\varepsilon) B(1-\lambda,1-\lambda)\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{t}(t-\beta)^{-\lambda}(\beta-\tau)^{1-2\lambda}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a(|x-\eta|+(1-\varepsilon)|\eta-\xi|)}d\eta\right)d\beta.$$

Введемо позначення: $\varphi(\eta)=|x-\eta|+|\eta-\xi|$. Тоді

$$|K_3(t-\tau,x;\tau,\xi)| \le c^3 c(\varepsilon) B(1-\lambda,1-\lambda)\int\limits_{\tau}^{t}(t-\beta)^{-\lambda}\times$$

$$\times(\beta-\tau)^{1-2\lambda}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\{-a(1-\varepsilon)\varphi(\eta)-a\varepsilon|x-\eta|\}d\eta.$$

Оскільки $\varphi(\eta)\ge|x-\xi|$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a(1-\varepsilon)\varphi(\eta)-a\varepsilon|x-\eta|}d\eta \le c(\varepsilon)e^{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|},$$

де $c(\varepsilon)=\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a\varepsilon|x-\eta|}d\eta = 2(a\varepsilon)^{-1}$. Крім того,

$$\int\limits_{\tau}^{t}(t-\beta)^{-\lambda}(\beta-\tau)^{1-2\lambda}d\beta=(t-\tau)^{2-3\lambda}B(1-\lambda,2-2\lambda).$$

Отже, $|K_3|$ оцінюється наступним чином:

$$|K_3(t-\tau,x;\tau,\xi)| \le c^3 c^2(\varepsilon) B(1-\lambda,1-\lambda)B(1-\lambda,2-2\lambda)\times$$

$$\times(t-\tau)^{2-3\lambda}\exp\{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|\}.$$

Далі оцінимо ядро K_4, урахувавши оцінки, які задовольняють ядра $K\equiv K_1$ та K_3:

$$|K_4(t-\tau,x;\tau,\xi)| \le \int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}}|K(t-\beta,x;\beta,\eta)|\times$$

$$\times|K_3(\beta-\tau,\eta;\tau,\xi)|d\eta \leq c^4c^2(\varepsilon)B(1-\lambda,1-\lambda)B(1-\lambda,2-2\lambda)\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{t}(t-\beta)^{-\lambda}(\beta-\tau)^{2-3\lambda}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-a\varepsilon|x-\eta|}\cdot e^{-a(1-\varepsilon)|\eta-\xi|}d\eta\right)d\beta \leq$$

$$\leq c^4c^3(\varepsilon)B(1-\lambda,1-\lambda)B(1-\lambda,2-2\lambda)e^{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|}\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{t}(t-\beta)^{-\lambda}(\beta-\tau)^{2-3\lambda}d\beta.$$

Оскільки

$$\int\limits_{\tau}^{t}(t-\beta)^{-\lambda}(\beta-\tau)^{2-3\lambda}d\beta=(t-\tau)^{3-4\lambda}B(1-\lambda,3-3\lambda),$$

то для $|K_4|$ маємо оцінку:

$$|K_4(t-\tau,x;\tau,\xi)| \leq c^4c^3(\varepsilon)B(1-\lambda,1-\lambda)B(1-\lambda,2-2\lambda)\times$$

$$\times B(1-\lambda,3-3\lambda)(t-\tau)^{3-4\lambda}\exp\{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|\}.$$

За допомогою методу математичної індукції доводимо, що

$$|K_m(t-\tau,x;\tau,\xi)| \leq c^mc^{m-1}(\varepsilon)B(1-\lambda,1-\lambda)B(1-\lambda,2-2\lambda)\times$$

$$\times B(1-\lambda,3-3\lambda)...B(1-\lambda,(m-1)-(m-1)\lambda)(t-\tau)^{m-1-m\lambda}\times$$

$$\times\exp\{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|\},\ m\geq 2.$$

Урахувавши формули

$$B(z,\omega)=\Gamma(z)\Gamma(\omega)/\Gamma(z+\omega)$$

(Γ – гамма-функція), $\Gamma(1+x)=x\Gamma(x)$, знайдемо, що

$$B(1-\lambda,1-\lambda)B(1-\lambda,2-2\lambda)B(1-\lambda,3-3\lambda)\dots$$

$$\dots B(1-\lambda,(m-1)-(m-1)\lambda)=$$

$$= \frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(1-\lambda)\Gamma(1-\lambda)\Gamma(2-2\lambda)\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(2(1-\lambda))\Gamma(3(1-\lambda))\Gamma(4(1-\lambda))...\Gamma(m(1-\lambda))}\times$$

$$\times\Gamma(3-3\lambda)\ldots\Gamma((m-1)(1-\lambda)) =$$

$$= \Gamma(1-\lambda)\frac{\Gamma^m(1-\lambda)}{\Gamma(m(1-\lambda))}, \quad m \geq 2.$$

Таким чином, для ряду $\sum\limits_{m=1}^{\infty} K_m$ справджуються оцінки:

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} K_m(t-\tau, x; \tau, \xi)\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |K_m(t-\tau, x; \tau, \xi)| \leq$$

$$\leq c(t-\tau)^{-\lambda} e^{-a|x-\xi|} c^{-1}(\varepsilon)\Gamma(1-\lambda)(t-\tau)^{-\lambda} \sum_{m=2}^{\infty} c^m c^m(\varepsilon)\times$$

$$\times(t-\tau)^{m(1-\lambda)} \frac{\Gamma^m(1-\lambda)}{\Gamma(m(1-\lambda))} e^{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|} \leq$$

$$\leq c(t-\tau)^{-\lambda} e^{-a|x-\xi|} + c^{-1}(\varepsilon)\Gamma(1-\lambda)(t-\tau)^{-\lambda} \sum_{m=2}^{\infty} c^m c^m(\varepsilon)\times$$

$$\times T^{m(1-\lambda)} \frac{\Gamma^m(1-\lambda)}{\Gamma(m(1-\lambda))} e^{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|}.$$

Внаслідок формули Стірлінга

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} e^x x^{x-1/2} e^{\theta/(12x)}, \quad x > 0, \quad 0 < \theta < 1,$$

маємо, що

$$\frac{\Gamma^m(\omega_0)}{\Gamma(m\omega_0)} \leq \beta_0 \frac{\theta_0^m}{m^{m\omega_0}}, \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \theta_0 = 2\sqrt{2\pi} e, \quad \omega_0 = 1-\lambda.$$

З останньої оцінки випливає збіжність ряду

$$\sum_{m=2}^{\infty} \beta^m \frac{\Gamma^m(1-\lambda)}{\Gamma(m(1-\lambda))}, \ \beta = c \cdot c(\varepsilon) T^{1-\lambda}.$$

Отже, ряд $\sum_{m=1}^{\infty} K_m$ при $0 < \delta_0 \le t - \tau \le T$ збігається абсолютно і рівномірно, а його сума – функція $\Phi(t, x; \tau, \xi)$ при $t > \tau$ є неперервною функцією аргументів x, ξ. Покладемо $\varepsilon = 1/2$; тоді для Φ справджується нерівність

$$|\Phi(t, x; \tau, \xi)| \le d_0 (t - \tau)^{-\lambda} \exp\left\{-\frac{a}{2}|x - \xi|\right\}. \tag{5.55}$$

Ця оцінка забезпечує збіжність інтегралів (5.50), (5.51). Звідси випливає, що інтеграл в (5.51) рівний

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_{\tau}^{t} d\mu \int_{\mathbb{R}} K(t - \mu, x; \mu, \eta) K_m(\mu - \tau, \eta; \tau, \xi) d\eta =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} K_{m+1}(t - \tau, x; \tau, \xi).$$

Отже, Φ є розв'язком рівняння (5.51).

Нагадаємо, що для $|G(t - \tau, x - \xi; \tau, \xi)|$ правильною є оцінка

$$|G(t - \tau, x - \xi; \tau, \xi)| \le c(t - \tau)^{-\lambda} \exp\{-a|x - \xi|\}, \lambda = 1/\alpha, \tag{5.56}$$

де сталі $c, a > 0$ не залежать від t, τ (див. (5.31) при $k = 0$).

На підставі нерівностей (5.56), (5.55), (5.53) здійснимо оцінку Γ; при цьому в (5.53) покладемо $\varepsilon = 1/2$. Отже,

$$|\Gamma(t, x; \tau, \xi)| \le \int_{\tau}^{t} d\mu \int_{\mathbb{R}} |G(t-\mu, x-\eta; \mu, \eta)| \cdot |\Phi(\mu, \eta; \tau, \xi)| d\eta \le$$

$$\le c \int_{\tau}^{t} (t - \mu)^{-\lambda} (\mu - \tau)^{-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-a|x-\eta| - \frac{a}{2}|\eta - \xi|} d\eta \right) d\mu \le$$

$$\leq \widetilde{c}(t-\tau)^{1-2\lambda}\exp\left\{-\frac{a}{4}|x-\xi|\right\}. \tag{5.57}$$

Із оцінки (5.57) випливає, що для довільної неперервної обмеженої на $\mathbb{R}$ функції φ

$$\int_{\mathbb{R}}|\Gamma(t,x;0,\xi)|\cdot|\varphi(\xi)|d\xi \leq \widetilde{c}t^{1-2\lambda}\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{-\frac{a}{4}|x-\xi|\right\}d\xi =$$

$$= dt^{1-2\lambda}\int_{\mathbb{R}}\exp\{-|y|\}dy = d_1t^{1-2\lambda},$$

$1-2\lambda = 1-\frac{2}{\alpha} > 0$, якщо $\alpha > 2$.

Звідси вже випливає, що у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ справджується граничне співвідношення

$$\lim_{t\to+0}\int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi = 0.$$

На підставі отриманих результатів твердимо, що функція

$$Z(t,x;\tau,\xi) = V(t,x;\tau,\xi) + \Gamma(t,x;\tau,\xi),$$

$$V(t,x;\tau,\xi) \equiv G(t-\tau,x-\xi;\tau,\xi),$$

є фундаментальним розв'язком нелокальної за часом m-точкової задачі для рівняння (5.20), а функція

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}}V(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}}\Gamma(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi =$$

$$= u_1(t,x)+u_2(t,x), (t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}, \varphi\in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}) \tag{5.58}$$

– розв'язок цієї задачі при $\tau = 0$. Підсумуємо отримані результати у вигляді наступного твердження.

Теорема 5.3. *Нелокальна m-точкова задача для рівняння (5.20) з параметром $\tau = 0$ розв'язна в класі X, при цьому розв'язок зображується формулою (5.58); $u(t,x)$ є неперервною обмеженою на $\mathbb{R}$ функцією змінної x при кожному $t \in (0,T]$.*

Список використаної літератури

1. *Ключанцев М.И.* Интегралы дробного порядка и сингулярные краевые задачи // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 6. – С. 983–990.
2. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 463 с.
3. *Конаков П.К., Веревочкин Т.Е.* Тепломассообмен при получении монокристаллов. – М.: Металлургия, 1971. – 387 с.
4. *Лыков А.В.* Тепломассообмен. Справочник. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.
5. *Крехивский В.В., Матийчук М.И.* Фундаментальные решения и задача Коши для линейных параболических систем с оператором Бесселя // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 181, № 6. – С. 1320-1323.
6. *Матийчук М.И.* Задача Коши для одного класса вырождающихся параболических систем // Укр. мат. журн. – 1984. – Т. 36, № 3. – С. 321-327.
7. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 444 с.
8. *Матийчук М.И.* Об одном методе решения задачи Коши для сингулярных параболических уравнений // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, № 1. – С. 135-138.
9. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – К.: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
10. *Hopf E.* Uber den funktionen den analytischen charakter der Lösungen elliptischer differentialgleichungen zweiter ordnung // Math. Zeitschr. – 1934. – 38. – S. 257–282.
11. *Матийчук М.И., Эйдельман С.Д.* О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини // Труды семинара по функциональному анализу. – Воронеж, 1967. – Вып. 9. – С. 54-83.
12. *Крехивский В.В.* Теоремы единственности решений задачи Коши для уравнений с оператором Бесселя // Математическое моделирование физических процессов. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1989. – С. 82-86.
13. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

14. *Ивасишен С.Д., Лавренчук В.П.* Об интегральном представлении решений параболической системы с оператором Бесселя // Нелинейные граничные задачи. – 1992. – Вып. 4. – С. 19-25.

15. *Веренич И.И., Матийчук М.И.* О свойствах решений параболических систем с оператором Бесселя // Математический сборник. – К.: Наук. думка, 1976. – С. 151–154.

16. *Веренич И.И.* Внутренние оценки решений параболических уравнений с оператором Бесселя // Докл. АН УССР. – 1977. – № 11. – С. 969-974.

17. *Веренич И.И.* Задача Коши для B-параболических систем с особенностями в коэффициентах // Мат. физика: Респ. межвед. сб. – 1983. – Вып. 33. – С. 61-65.

18. *Муравник А.Б.* О стабилизации решения задачи Коши для одного сингулярного уравнения. – Воронежский ун-т, 1985. – 8 с. – Деп. в ВИНИТИ 29.11.85, № 8549-В85.

19. *Муравник А.Б.* О стабилизации решений параболических уравнений с оператором Бесселя. – Воронежский ун-т, 1986. – 58 с. – Деп. в ВИНИТИ 17.06.86, № 2095-В86.

20. *Городецький В.В., Житарюк І.В., Лавренчук В.П.* Про слабку стабілізацію розв'язків задачі Коші для лінійних параболічних рівнянь з оператором Бесселя // Доп. АН України. – 1993. – № 2. – С. 5–9.

21. *Городецкий В.В., Житарюк И.В.* Стабилизация решений задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений в пространствах обобщенных функций // Нелинейные граничные задачи: сб. науч. тр. – К.: Наук. думка, 1993. – С. 31–36.

22. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

23. *Куликов А.А.* Фундаментальные решения дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 2. – С. 299–305.

24. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. – М.: Мир, 1986. – 456 с.

25. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Матем. сб. – 1955. – Т. 36, № 2. – С. 299–310.

26. *Городецький В.В., Житарюк І.В.* Задача Коші для одного класу параболічних систем з оператором Бесселя в просторах узагальнених функцій // Доп. АН УРСР. – 1991. – № 7. – С. 20–23.

27. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.

28. *Городецький В.В.* Про гладкі розв'язки B-параболічних рівнянь та множини їх початкових значень // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – Вип. 12. – С. 268–272.

29. *Городецький В.В., Мартинюк О.В.* Оператори Бесселя нескінченного порядку та їх застосування // Доп. НАН України, 2003. – № 6. – С. 7–12.

30. *Мартинюк О.В.* Задача Коші для еволюційних рівнянь з оператором Бесселя нескінченного порядку // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 134. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 71-83.

31. *Городецкий В.В., Мартынюк О.В.* Задача Коши для эволюционных уравнений с оператором Бесселя бесконечного порядка. I // Изв. вузов. Математика. – 2010. – № 6. – С. 3–15.

32. *Городецкий В.В., Мартынюк О.В.* Задача Коши для эволюционных уравнений с оператором Бесселя бесконечного порядка. II // Изв. вузов. Математика. – 2010. – № 7. – С. 31–42.

33. *Городецький В.В., Дрінь С.С.* Задача Коші для еволюційних сингулярних рівнянь нескінченного порядку // Доп. НАН України. – 2003. – № 11. – С. 12–17.

34. *Городецкий В.В., Тупкало И.С.* Задача Коши для эволюционных уравнений с оператором Бесселя бесконечного порядка // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 3. – С. 335–348.

35. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя зі зростаючими коефіцієнтами // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 288. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 5–11.

36. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Задача Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя зі зростаючими коефіцієнтами // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 314-315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 7–16.

37. *Матийчук М.И.* Задача Дирихле и Неймана для параболических уравнений с оператором Бесселя // Мат. физика: Респ. межвед. сб. – 1973. – Вып. 14. – С. 113–118.

38. *Матійчук М.І.* Про B-параболічну задачу з крайовими операторами рівного порядку в просторах Діні-Гельдера // Доп. АН УРСР. – 1974. – № 4. – С. 302–305.

39. *Матийчук М.И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применение к краевым задачам. II // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11, № 7. – С. 1293–1309.

40. *Матийчук М.И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применение к краевым задачам. III // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 2. – С. 291–303.

41. *Матийчук М.И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применение к краевым задачам. IV // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 5. – С. 885–899.

42. *Матійчук М.І.* Про розв'язок загальної параболічної сингулярної крайової задачі // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. праць. – Чернівці: ЧДУ, 1990. – С. 153–163.

43. *Киприянов И.А., Катрахов В.В. , Ляпин В.М.* О краевых задачах в областях общего вида для сингулярных параболических систем уравнений // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 230, № 6. – С. 1271–1274.

44. *Крехивский В.В.* Смешанная задача для параболических уравнений // Краевые задачи матем. физики: Сб. науч. трудов. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 45–50.

45. *Крехівський В.В.* Мішана задача для параболічних систем з оператором Бесселя // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – Чернівці: Прут, 2002. – Вип. 9. – С. 95–101.

46. *Лавренчук В.П., Матийчук М.И.* О нелинейных B-параболических краевых задачах // Матем. физика: Респ. межвед. сб. – К.: Наукова думка, 1977. – Вып. 21. – С. 80–85.

47. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.

48. *Лавренчук В.П., Матийчук М.И.* Глобальная разрешимость граничной задачи для квазилинейных параболических систем и задач без начальных условий // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 34, № 6. – С. 710-717.

49. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

50. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные значения решений некоторых классов дифференциальных уравнений // Матем. сб. – 1977. – Т. 102, № 1. – С. 124–150.

51. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.

52. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* О граничных значениях решений однородных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 228, № 5. – С. 1021–1024.

53. *Князюк А.В.* Граничные значения решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 9. – С. 12–14.

54. *Князюк А.В.* Граничные значения бесконечно дифференцируемых полугрупп // Препринт. Ин-т математики АН УССР. – Киев, 1985. – № 69. – 47 с.

55. *Ball J.* Strongly continuous semigroups, weak solutions and the variation of constants formula // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 63. – P. 370–373.

56. *Горбачук В.І., Горбачук М.Л.* Про одне узагальнення еволюційного критерію Березанського самоспряженості оператора // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 5. – С. 608–615.

57. *Глушко В.П., Крейн С.Г.* О вырождающихся линейных дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 181, № 4. – С. 784–787.

58. *Соболевский П.Е.* О вырождающихся параболических операторах // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 196, № 2. – С. 302–304.

59. *Горбачук М.Л., Пивторак Н.И.* О решениях эволюционных уравнений параболического типа с вырождением // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 8. – С. 1317–1324.

60. *Горбачук В.М., Мацишин И.Т.* О решениях эволюционных уравнений с вырождением в банаховом пространстве // Спектральная теория дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 5–10.

61. *Кнюх Б.И.* О представлении и граничных значениях решений однородного дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Укр. мат. журн. – 1986. – Т. 38, № 1. – С. 101–104.

62. *Фишман И.П.* О представлении общего решения дифференциально-операторного уравнения // Укр. мат. журн. – 1984. – Т. 36, № 6. – С. 804–808.

63. *Федорова Л.Б.* Граничные значения решений неоднородных дифференциально-операторных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 7. – С. 23–25.

64. *Горбачук В.И., Князюк А.В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук. – 1989. – Т. 44, № 3. – С. 55–91.

65. *Городецький В.В.* Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.

66. *Горбачук В.И.* О разрешимости задачи Дирихле для дифференциально-операторного уравнения второго порядка в различных пространствах // Прямые и обратные задачи спектральной теории дифференциальных операторов: Сб. науч. трудов. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 8–22.

67. *Боднарук С.Б., Городецький В.В., Ратушняк В.П.* Задача Коші для одного класу еволюційних рівнянь нескінченного порядку // Науковий вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Вип 191–192. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 10–17.

68. *Gorbachuk M.L., Gorbachuk V.I.* Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht (Boston) London: Kluwer, 1991. – 374 p.

69. *Gorbachuk M.L., Gorbachuk V.I.* On behavior of weak solutions of operator differential equations on $(0, \infty)$ // Operator Theory. Advances and Applications. – 2009. – 191. – P. 116–126.

70. *Gorbachuk M.L., Gorbachuk V.I.* On extensions and restrictions of semigroups of linear operators in a Banach space and their applications // Math. Nachr. – 2012. – 285, N 14–15. – P. 1860–1870.

71. *Шубин М.А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. – М.: Наука, 1978. – 280 с.

72. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1985. – 472 с.

73. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и операторов Фурье. Т. 1. Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1984. – 360 с.

74. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и операторов Фурье. Т. 2. Интегральные операторы. – М.: Мир, 1984. – 400 с.

75. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. – М.: Мир, 1986. – 464 с.

76. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. – М.: Мир, 1986. – 456 с.

77. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1987. – 696 с.

78. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 4. Интегральные операторы Фурье. – М.: Мир, 1988. – 448 с.

79. *Tsutsumi C.* The fundamental solution for a degenerate parabolic pseudo-differential operator // Proc. Japan Acad. – 1974. – V. 50, N 1. – P. 11–15.

80. *Tsutsumi C.* The fundamental solution for a parabolic pseudodifferential operator and parametrices for degenerate operators // Proc. Japan Acad. – 1975. – V. 51, N 2. – P. 103–107.

81. *Kumano-go H.* Algebras of pseudodifferential operators // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. – 1970. – V. 17. – P. 31–50.

82. *Kumano-go H., Nagase M.* L_p-theory of pseudodifferential operators // Proc. Japan Acad. – 1970. – V. 46. – P. 138–142.

83. *Shinkai K.* On symbols of fundamental solutions of parabolic systems //Proc. Japan Acad. – 1974. – V. 50, N 5–6. – P. 337–341.

84. *Городецький В.В., Ленюк О.М.* Про дробове диференціювання у просторах типу S' // Доп. НАН України, 1998. – № 11. – С. 20–24.

85. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

86. *Кочубей А.Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 8. – С. 1359–1368.

87. *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 4. – С. 485–492.

88. *Кочубей А.Н., Эйдельман С.Д.* Уравнения одномерной фрактальной диффузии // Доп. НАН України. – 2003. – № 12. – С. 11–16.

89. *Schwartz L.* Theorie des distributions. In 2 volms. – Paris: Hermann, 1951. – V. 2. - 169 p.

90. *Frostman O.* Potential d'equilibre et capacite des ensembles avec quelques applications a la theorie des functions // Medd. Lunds Univ. Mat. Semin. – 1935. – V. 3. – P. 1–118.

91. *Hardy G.H., Littlwood J.E.* Some properties of fractional integrals. I // Math. Z. – 1928. – Bd 27, N 4. – S. 565–606.

92. *Соболев С.Л.* Об одной теореме функционального анализа // Мат. сб. – 1938. – Т. 4, № 3. – С. 471–497.

93. *Thorin G.O.* Convexity theorems // Comm. Semin. Math. L'Univ Lund Uppsala. – 1948. – V. 9. – P. 1–57.

94. *Stein E.M.* The characterization of functions arising as potentials. I // Bull. Amer. Math. Soc. – 1961. – V. 67, N 1. – P. 102–104.

95. *Лизоркин П.И.* Описание пространства $L_p^r(\mathbb{R}^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов // Мат. сб. – 1970. – Т. 81, № 1. – С. 79–91.

96. *Самко С.Г.* О пространствах риссовых потенциалов //Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – Т. 40, № 5. – С. 1443–1172.

97. *Самко С.Г.* Обобщенные риссовы потенциалы и гиперсингулярные интегралы с однородными характеристиками, их символы и обращение // Тр. МИАН СССР. – 1980. – Т. 156. – С. 157–222.

98. *Wheeden R.L.* On hypersingular integrals and Lebesgue spaces of differentiable functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 134, N 3. – P. 421–435.

99. *Wheeden R.L.* On hypersingular integrals and certain spaces of locally differentiable functions // Ibid. –1969. – V. 146, N 2. – P. 211–230.

100. *Fisher M.J.* Some generalizations of the hyper singular integral operators // Stud. Math. – 1973. – V. 47, N 2. – P. 95–121.

101. *Самко С.Г.* Пространства $L^{\alpha}_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ и гиперсингулярные интегралы // Stud. Math (PRL). – 1977. – V. 61, N 3. – P.193–230.

102. *Самко С.Г.* Обобщенные риссовы потенциалы и гиперсингулярные интегралы, их символы и обращение // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 232, № 3. – С. 528–531.

103. *Кочубей А.Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – Т. 52, № 5. – С. 909-934.

104. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения. – М.: Наука, 1983. – 304 с.

105. *Эйдельман С.Д., Дринь Я.М.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений // Приближенные методы математического анализа. – Киев, 1974. – С. 60 – 69.

106. *Дринь Я. М.* Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 1. – С. 19–21.

107. *Дринь Я.М.* Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 3. – С. 198–202.

108. *Эйдельман С.Д., Дринь Я.М.* Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений // Мат. исследования. – 1981. – Т. 63. – С. 18–33.

109. *Федорюк М.В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциальных параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 7. – С. 1296–1301.

110. *Schneider W.R.* Stable distributions: Fox function representation and generalization // Lecture Notes Phus. – 1986. – V. 262. – P. 497–511.

111. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel-Boston-Berlin: Bizkhaser Verlag, 2004. – 390 p. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 152).

112. *Літовченко В.А.* Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з початковими умовами в просторах узагальнених функцій типу розподілів: дис. ... кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.02. – Чернівці, 1995. – 118 с.

113. *Ейдельман С.Д., Івасишен С.Д.* Про фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних псевдодиференціальних рівнянь // Доп. НАН України. – 1997. – № 6. – С.18–23.

114. *Дрінь Р.Я.* Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. – Львів, 1997. – 115 с.

115. *Eidelman S.D., Drin R.Ya.* About properties of the solutions of diffusion equations with pseudodifferential summand // Доп. НАН України. – 1995. – № 5. – С. 9–12.

116. *Eidelman S.D., Drin R.Ya.* About the investigation of the action of the pseudodifferential operators over the special classes of test functions // Доп. НАН України. – 1997. – № 3. – С. 32–37.

117. *Дрінь Р.Я.* Оцінка ядра Пуассона однієї параболічної псевдодиференціальної крайової задачі // Нелинейные краевые задачи математической физики: Сб. науч. трудов. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – С. 72–73.

118. *Дрінь Р.Я.* Стабілізація розв'язків задачі Коші для систем параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – № 14. – С. 88–102.

119. *Городецький В.В., Літовченко В.А.* Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь у просторах узагальнених функцій типу S' // Доп. АН України. – 1992. – № 10. – С. 6–9.

120. *Городецький В.В., Літовченко В.А.* Про слабку стабілізацію розв'язків задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – Вип. 8. – С. 191–195.

121. *Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних систем з цілими аналітичними символами диференціювання // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, № 9. – С. 1211–1233.

122. *Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних рівнянь з гладкими символами // Укр. мат. вісник. – 2006. – Т. 3, № 1. – С. 19-51.

123. *Літовченко В.А.* Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних систем у просторах періодичних функцій // Укр. мат. вісник. – 2007. – Т. 4, № 3. – С. 394-420.

124. *Городецький В.В., Ленюк О.М.* Еволюційні рівняння з псевдобесселевими операторами // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 11-15.

125. *Ленюк О.М.* Задача Коші для еволюційних рівнянь з псевдобесселевими операторами // Науковий вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. 349. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 55–65.

126. *Шевчук Н.М.* Задача Коші для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами нескінченного порядку // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 374. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 145-154.

127. *Городецький В.В.* Задача Коші для еволюційних рівнянь нескінченного порядку. – Чернівці: Рута, 2005. – 291 с.

128. *Дубинский Ю.А.* Пространства Соболева бесконечного порядка и поведение задач при неограниченном возрастании порядка уравнения // Матем. сб. – 1975. – Т. 98, № 2. – С. 163–184.

129. *Дубинский Ю.А.* Нетривиальность пространств Соболева бесконечного порядка в случае полного евклидова пространства и тора // Матем. сб. – 1976. – Т. 100, № 3. – С. 436–446.

130. *Грошев П.Н.* Разрешимость нелинейных эллиптических уравнений бесконечного порядка в пространствах почти периодических функций // Сборник научн. трудов МЭИ. – 1989. – Т. 191. – С. 16–22.

131. *Дубинский Ю.А.* Следы функций из пространств Соболева бесконечного порядка и неоднородные краевые задачи // Матем. сб. – 1978. – Т. 106, № 1. – С. 66–84.

132. *Кобилов А.Я.* Критерий нетривиальности пространств Соболева бесконечного порядка в угловых областях // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 266, № 5. – С. 1040–1044.

133. *Чан Дык Ван.* Нетривиальность пространств Соболева бесконечного порядка в ограниченной области евклидова пространства // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 250, № 6. – С. 1331–1334.

134. *Tran Duc Van, Ha Huy Band, Gorenflo R.* Sobolev-Orlicz spaces of infinite order for a full Euclidean space. – Berlin. – 1990. – (Preprint FB Mathematic A-90-14, Freibe Univers).

135. *Умаров С.Р.* Некоторые пространства бесконечного порядка и приложения к операторным уравнениям // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 275, № 2. – С. 313–317.

136. *Дубинский Ю.А.* Пределы банаховых пространств. Теоремы вложения. Приложения к пространствам Соболева бесконечного порядка // Матем. сб. – 1979. – Т. 110, № 3. – С. 428–439.

137. *Дубинский Ю.А.* Пределы монотонных последовательностей банаховых пространств. Примеры // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 251, № 3. – С. 537–540.

138. *Ха Зуй Банг.* О некоторых теоремах вложения пространств периодических функций бесконечного порядка // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, № 4. – С. 66–81.

139. *Балашова Г.С.* Теоремы вложения банаховых пространств бесконечно дифференцируемых функций // Матем. сб. – 1985. – Т. 128, № 1. – С. 66–81.

140. *Дубинский Ю.А.* К теории задачи Коши для уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 259, № 4. – С. 781–785.

141. *Дубинский Ю.А.* Алгебра дифференциальных операторов бесконечного порядка и псевдодифференциальные уравнения с ана-

литическим символом // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 26, № 4. – С. 807–812.

142. *Дубинский Ю.А.* Псевдодифференциальные операторы с комплексными переменными и их приложения // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 268, № 5. – С. 1046–1059.

143. *Дубинский Ю.А.* Задача Коши и псевдодифференциальные операторы в комплексной области // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45, вып. 2. – С. 115–142.

144. *Treves F.* Ovsjannikov theorem and hyperdifferential operators // Notas de Matem. Pura Appl. Rio De Janeiro. – 1968. – V. 46. – P. 1–237.

145. Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними / [*Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук*]. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.

146. *Каленюк П.І., Нитребич З.М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2002. – 292 с.

147. *Городецький В.В., Ленюк О.М.* Задача Коші для еволюційних рівнянь з оператором диференціювання нескінченного порядку // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2000. – Вип. 4. – С. 65–70.

148. *Леонтьев А.Ф.* Обобщения рядов экспонент. – М.: Наука, 1981. – 320 с.

149. *Коробейник Ю.Ф.* К вопросу о представлении любого линейного оператора в виде дифференциального оператора бесконечного порядка // Матем. заметки. – 1974. – Т. 16, вып. 2. – С. 277–283.

150. *Нагнибіда М.І.* Класичні оператори в просторах аналітичних функцій. – К.: Ін-т математики НАН України, 1995. – 297 с.

151. *Подпорин В.П.* К вопросу о представлении линейных операторов в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка // Сиб. мат. журн. – 1977. – Т. 18, № 6. – С. 1422–1425.

152. *Лінчук С.С.* Поточкова застосовність деяких класів операторів нескінченного порядку // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 191-192. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 79–81.

153. *Лінчук С.С.* Поточкова застосовність складових операторів нескінченного порядку відносно узагальненого диференціювання та узагальненого інтегрування // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 228. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 45–47.

154. *Лінчук С.С.* Про застосовність диференціальних операторів нескінченного порядку // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 269. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 60–62.

155. *Лінчук С.С.* Застосовність диференціальних операторів нескінченного порядку відносно q-похідної до просторів аналітичних функцій // IV Міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Ганна. Тези доповідей. – Черн. нац. унів., 2014. – С. 94–96.

156. *Kothe G.* Topologische lineare Raume. Bd 1. – Berlin, 1960. – 307 p.

157. *Власов В.В.* Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. – К.: Стройиздат, 1975. – 224 с.

158. *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.

159. *Підстригач Я.С.* Вибрані праці. – К.: Наукова думка, 1995. – 460 с.

160. *Алексеева С.М., Юрчук Н.И.* Метод квазиобращения для задачи управления начальным условием для уравнения теплопроводности с интегральным краевым условием // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 495–502.

161. *Вігак В.М.* Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами // Доп. АН України. – 1994. – № 8. – С. 57–60.

162. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294–304.

163. *Ионкин Н.И.* Об устойчивости одной краевой задачи теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 4. – С. 637–645.

164. *Ионкин Н.И., Моисеев Е.И.* О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 7. – С. 1284–1295.

165. *Камынин Л.И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1964. – Т. 4, № 6. – С. 1006–1024.

166. *Кеферов А.А.* Нелокальные краевые задачи для параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 1. – С. 74–78.

167. *Шополов Н.Н.* Смешанная задача для уравнения теплопроводности с нелокальным граничным условием // Докл. Болг. АН. – 1981. – Т. 34, № 7. – С. 935–936.

168. *Bouziani A., Benouar N.-E.* Probleme mixte avec conditions integrales pour une class d'equations paraboliques // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser I. – 1995. – Vol. 321. – P. 1177–1182.

169. *Cannon J.R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. – 1963. – Vol. 21. – P. 155–160.

170. *Водахова В.А.* Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 2. – С. 280–285.

171. *Нахушев А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложение к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72–81.

172. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.

173. *Cannon J., Ivan der Hoek.* Diffusion subject to the specification of mass // J. Math. Anal. Appl. – 1986. – Vol. 115, N 2. – P. 517–529.

174. *Майков А.Р., Поезд А.Д., Якунин С.А.* Экономический метод вычисления нестационарных нелокальных по времени условий излучения для волноводных систем // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. – 1990. – Т. 30, № 8. – С. 1267–1271.

175. *Муравей Л.А., Филиновский А.В.* Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения // Матем. заметки. – 1993. – Т. 54, № 4. – С. 98–116.

176. *Камынин В.Л., Саролди М.* Нелинейная обратная задача для параболического уравнения высокого порядка // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1998. – Т. 38, № 10. – С. 1683–1691.

177. *Іванчов М.І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 7. – С. 901–910.

178. *Ivanchov M.I.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Studies: Monograph Ser. – Vol. 10).

179. *Иванчов Н.И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 4. – С. 547–564.

180. *Ivanchov M.I.* A nonlical inverse problem for the diffusion equation // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 77. – С. 103–108.

181. *Іванчов М.І., Снітко Г.А.* Нелокальна обернена задача для рівняння дифузії в області з вільною межею // Буковинський мат. журн. – 2013. – Т. 1, № 3–4. – С. 49–55.

182. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высшая, школа, 1995. – 301 с.

183. *Белавин И.А., Капица С.П., Курдюмов С.П.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1998. – Т. 38, № 6. – С. 885–902.

184. *Lions J.* Equations differentielles operationelles et problemes aux limites. – Springer, grundlehrer edition: Berlin, 1961. – Vol. 111. – 292 p.

185. *Нахушев А.М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 92–101.

186. *Дезин А.А.* Операторы с первой производной по "времени" и нелокальные граничные условия // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 61–86.

187. *Дезин А.А.* Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 208 с.

188. *Дезин А.А.* Об операторных уравнениях второго порядка // Сиб. мат. журн. – 1978. – Т. 19, № 5. – С. 1032–1042.

189. *Юнусов М.Ю.* Операторные уравнения с малым параметром и нелокальные граничные условия // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 1. – С. 172–181.

190. *Юнусов М.Ю.* О некоторых краевых задачах, содержащих малый параметр // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 12. – С. 67–79.

191. *Мамян А.Х.* Общие граничные задачи в слое // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 267, № 2. – С. 292–296.

192. *Романко В.К.* К теории операторов вида $\dfrac{d^m}{dt^m} - a$ // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 11. – С. 1957–1970.

193. *Романко В.К.* Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10, № 11. – С. 117–131.

194. *Романко В.К.* Граничные задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 227, № 4. – С. 812–816.

195. *Романко В.К.* Разрешимость граничных задач для дифференциально-операторных уравнений высокого порядка // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 6. – С. 1081–1092.

196. *Романко В.К.* Операционное исчисление и разрешимость граничных задач // Матем. заметки. – 1979. – Т. 26, № 3. – С. 399–409.

197. *Романко В.К.* Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений // Матем. заметки. – 1985. – Т. 37, № 7. – С. 727–733.

198. *Романко В.К.* Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 286, № 1. – С. 47–50.

199. *Романко В.К.* О системах операторных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 9. – С. 1574–1585.

200. *Макаров А.А.* О необходимых и достаточных условиях корректной разрешимости краевой задачи в слое для систем дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 2. – С. 320–324.

201. *Макаров А.А.* Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 1. – С. 144–150.

202. *Крейн С.Г., Лаптев Г.И.* Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2, № 3. – С. 382–390.

203. *Крейн С.Г., Лаптев Г.И.* Корректность граничных задач для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2, № 7. – С. 919–926.

204. *Лаптев Г.И.* Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве и их приложения: автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.02. – Воронеж, 1964. – 8 с.

205. *Балаев М.К., Якубов С.Я.* Корректность смешанной задачи для некоторых классов корректных по Петровскому уравнений // Мат. заметки. – 1987. – Т. 42, № 4. – С. 527–536.

206. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 185, № 4. – С. 739–740.

207. *Гуревич П.Л.* Разрешимость нелокальных эллиптических задач // Мат. заметки. – 2002. – Т. 72, № 2. – С. 178–197.

208. *Гуревич П.Л.* Обобщенные решения нелокальних эллиптических задач // Мат. заметки. – 2005. – Т. 77, № 5. – С. 665–682.

209. *Гущин А.К., Михайлов В.П.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Мат. сб. – 1994. – Т. 185, № 1. – С. 121–160.

210. *Гущин А.К., Михайлов В.П.* Об однозначной разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Докл. РАН. – 1996. – Т. 351, № 1. – С. 7–8.

211. *Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д.* О нелокальных граничных задачах для эллиптических уравнений // Мат. исследования. – 1971. – Т. 6, № 2. – С. 63–73.

212. *Камынин Л.И.* Единственность решений краевых задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 1. – С. 39–49.

213. *Лопушанська Г.П.* Узагальнені крайові задачі для лінійних та напівлінійних еліптичних рівнянь // Укр. мат. вісник. – 2005. – Т. 2, № 3. – С. 377–394.

214. *Панеях Б.П.* О некоторых нелокальных краевых задачах для линейных дифференциальных операторов // Матем. заметки. – 1984. – Т. 35, № 3. – С. 425–434.

215. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* Об одном классе общих нелокальных эллиптических задач // Докл. АН СССР. – 1970. – Т. 192, № 3. – С. 511–513.

216. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем // Сиб. мат. журн. – 1972. – Т. 13, № 1. – С. 165–181.

217. *Скубачевский А.Л.* Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 1. – С. 120–131.

218. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи. I. – М.: РУДН, 2007. – Т. 26. Фундаментальные направления. – С. 3–132.

219. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи. II. – М.: РУДН, 2009. – Т. 33. Фундаментальные направления. – С. 3–179.

220. *Chabrowski J.* On non-local problems for elliptic linear equations // Funckcialaj Ekvacioj. – 1980. – Vol. 32. – P. 215–226.

221. *Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д.* Параболические граничные задачи. – Кишинев: Штиинца, 1992. – 328 с.

222. *Кожанов А.И.* О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестник СамГУ. – 2008. – № 3. – С. 165–174.

223. *Кожанов А.И.* О разрешимости краевых задач с нелокальными и интегральными условиями для параболических уравнений // Нелинейные граничные задачи. – 2010. – Т. 20. – С. 54–76.

224. *Комарницька Л.І., Пташник Б.Й.* Крайові задачі для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, № 9. – С. 1197–1208.

225. *Маловичко В.А.* О разрешимости нелокальных краевых задач для некоторых систем эволюционных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, № 2. – С. 211–216.

226. *Матійчук М.І.* Про нелокальну параболічну крайову задачу // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 3. – С. 362–367.

227. *Пукальський І.Д.* Нелокальна параболічна крайова задача з внутрішнім і фінальним керуванням // Нелінійні крайові задачі. – 2000. – Т. 20. – С. 116–128.

228. *Митропольский Ю.А., Шхануков М.Х., Березовский А.А.* Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, № 6. – С. 780–800.

229. *Пукальський І.Д.* Нелокальна задача Діріхде та задача оптимального керування для лінійних параболічних рівнянь з виродженням // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – 2006. – № 314–315. – С. 150–158.

230. *Орынбасаров М., Орынбасаров Е.М.* Нелокальные начальные и краевые задачи для уравнения теплопроводности с меняющимся направлением времени // Математический журнал. Алмааты. – 2002. – Т. 2, № 4. – С. 68–74.

231. *Каленюк П.І., Когут І.В., Нитребич З.Н.* Диференціально-символьний метод розв'язування нелокальної крайової задачі для однорідної системи рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 46, № 3. – С. 25–31.

232. *Каленюк П.І., Когут І.В., Нитребич З.Н.* Диференціально-символьний метод розв'язування нелокальної крайової задачі для рівняння з частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45, № 2. – С. 7–15.

233. *Каленюк П.И., Баранецкий Я.О., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – К.: Наукова думка, 1993. – 232 с.

234. *Чесалин В.И., Юрчук Н.И.* Задача с граничными условиями для абстрактных уравнений Лява // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1973. – № 6. – С. 30–35.

235. *Чесалин В.И.* Задача с нелокальными граничными условиями для абстрактных уравнений Лява // Деп. в ВИНИТИ. – 1976. – N2913-76. – 18 с.

236. *Чесалин В.И.* Задача с нелокальными граничными условиями для некоторых абстрактных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 11. – С. 2104–2106.

237. *Чесалин В.И.* Задача с нелокальными граничными условиями для дифференциально-операторных уравнений нечетного порядка // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 3. – С. 468–476.

238. *Чесалин В.И., Юрчук Н.И.* Задача сопряжения абстрактных параболических и гиперболических уравнений с нелокальными условиями по t // Докл. АН БССР. – 1974. – Т. 18, № 3. – С. 197–200.

239. *Энгельман У.* Задача с нелокальными граничными условиями для гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11, № 9. – С. 1687–1693.

240. *Корбут Л.І., Матійчук М.І.* Про зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1994. – Т. 46, № 7. – С. 947–951.

241. *Chabrowski J.* On the non-local problems with a functional for parabolic equation // Funckcialaj Ekvacioj. – 1984. – Vol. 27. – P. 101–123.

242. *Шелухин В.В.* Нелокальная по времени задача для уравнений динамики баротропного океана // Мат. заметки. – 1991. – Т. 49, № 1. – С. 135–143.

243. *Шелухин В.В.* Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений // Сиб. мат. журн. – 1993. – Т. 34, № 2. – С. 191–207.

244. *Шелухин В.В.* Нелокальная по времени задача для уравнений динамики баротропного океана // Сиб. мат. журн. – 1995. – Т. 36, № 3. – С. 701–724.

245. *Либерман Г.М.* Нелокальные задачи для квазилинейных параболических уравнений // Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы. – 2002. – Т. 1. – С. 233–254.

246. *Маценис И.* О регулярности краевых условий // Дифференц. уравнения и их приложения. – Ин-т матем. и кибернет. АН Литов. ССР, 1978. – С. 17–24.

247. *Лопушанська Г., Чмир О.* Існування та регулярність розв'язків узагальненої нормальної крайової задачі для квазілінійниї параболічних систем // Математичний вісник НТШ. – 2005. – Т. 2. – С. 123–134.

248. *Власій О.Д., Пташник Б.Й.* Нелокальна крайова задача для лінійних рівнянь з частинними похідними, нерозв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 3. – С. 370–381.

249. *Гой Т.П., Пташник Б.Й.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 2. – С. 186–195.

250. *Гой Т.П., Пташник Б.Й.* Нелокальні крайові задачі для систем лінійних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 11. – С. 1478–1487.

251. *Задорожна Н.М., Мельник О.М., Пташник Б.Й.* Крайова задача для параболічних рівнянь із загальними нелокальними умовами // Укр. мат. журн. – 1994. – Т. 46, № 12. – С. 1621–1626.

252. *Илькив В.С., Пташник Б.Й.* Некоторая нелокальная двухточечная задача для систем уравнений с частными производными // Сиб. мат. журн. – 2005. – Т. 46, № 1. – С. 119–129.

253. *Ільків В.С.* Нелокальна крайова задача для систем із частинними похідними в анізотропних просторах // Нелинейные граничные задачи. – 2001. – Вып. 11. – С. 57–64.

254. *Ільків В.С., Пташник Б.Й.* Зображення та дослідження розв'язків нелокальної задачі для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 2. – С. 184–194.

255. *Ільків В.С., Пташник Б.Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними, метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, № 12. – С. 1624–1650.

256. *Білусяк Н.І., Комарницька Л.І., Пташник Б.Й.* Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 12. – С. 1592–1602.

257. *Пташник Б.Й.* Некоректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

258. *Илькив В.С.* Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 5. – С. 15–19.

259. *Илькив В.С.* Многоточечная нелокальная задача для уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 3. – С. 487–492.

260. *Ільків В.С.* Розв'язність нелокальної задачі для систем рівнянь з частинними похідними зі зсувами аргументів // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2010. – Вип. 21. – С. 72–85.

261. *Ільків В.С.* Розв'язність нелокальної задачі для лінійних неоднорідних рівнянь з частинними похідними зі зсувами аргументів // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка". Сер. фіз.-мат. науки. – 2011. – Вип. 718. – С. 46–53.

262. *Медвідь О.М., Симотюк М.М.* Задача з інтегральними умовами для лінійної системи рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументу // Матем. вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 414–427.

263. *Ільків В.С., Магеровська Т.В.* Нелокальна задача з багатьма параметрами для системи рівнянь з частинними похідними зі зсувами // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. – 2012. – Т. 2, № 2–3. – С. 73–80.

264. *Каленюк П.І., Когут І.В., Нитребич І.В.* Задача з нелокальною двоточковою умовою за часом для однорідного рівняння із частинними похідними нескінченного порядку за просторовими змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 4. – С. 17–26.

265. *Ільків В.С., Страп Н.І.* Нелокальна крайова задача для рівняння з частинними похідними у багатовимірній комплексній області // Наук. вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інф. – 2013. – Вип. 24, № 1. – С. 60–72.

266. *Ільків В.С., Страп Н.І.* Про розв'язність нелокальної крайової задачі для диференціально-операторного рівняння в уточненій соболєвській шкалі // Збірник праць Ін-ту математики НАНУ. – 2014. – Т. 11, № 2. – С. 154–179.

267. *Ільків В.С., Страп Н.І.* Умови розв'язності нелокальних задач для диференціальних рівнянь з операторними коефіцієнтами у просторах рядів Діріхле-Тейлора // Буковинський мат. журн. – 2013. – Т. 1, № 3–4. – С. 56–68.

268. *Ільків В.С., Страп Н.І., Волянська І.І.* Нелокальна крайова задача для рівняння з оператором диференціювання $z\frac{\partial}{\partial z}$ у комплексній області // Прикладні проблеми механіки і матем. – 2012. – Т. 10. – С. 15–26.

269. *Смагина Т.И.* О разрешимости обобщенной периодической задачи // Школа по теории операторов в функциональных пространствах: Тези докл. – Минск, 1982. – С. 180.

270. *Борок В.М., Антыпко И.И.* Критерий безусловной корректности краевой задачи в слое // Теория функций, функицональный анализ и их приложения. – Харьков, 1976. – Вып. 26. – С. 3–9.

271. *Борок В.М., Фардигола Л.В.* Нелокальные коректные краевые задачи в слое // Матем. заметки. – 1990. – Т. 48, № 1. – С. 20–25.

272. *Фардигола Л.В.* Нелокальная краевая задача в слое: влияние параметров на свойства решений // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 12. – С. 2151–2161.

273. *Кмить И.Я., Лавренюк С.П.* О нелокальных задачах для двумерных гиперболических систем // Успехи мат. наук. – 1991. – Т. 46, № 9. – С. 149.

274. *Кміть І.Я.* Про одну нелокальну задачу для квазілінійної гіперболічної системи першого порядку з двома незалежними змінними // Укр. мат. журн. – 1993. – Т. 45. № 9. – С. 1307–1311.

275. *Мельникова И.В.* Условия разрешимости абстрактных краевых задач // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 17–24.

276. *Сабитова Ю.К.* Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. –2009. – № 12. – С. 49–58.

277. *Сабитов К.Б.* Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. – 2011. – Т. 89, № 4. – С. 596–602.

278. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 248 с.

279. *Городецький В.В., Дрінь Я.М.* Задача Діріхле для одного класу еволюційних рівнянь // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 336-337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 61–78.

280. *Дрінь Я.М.* Нелокальна багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. 501. Математика. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. – С. 24–32.

281. *Дрінь Я.М.* Багатоточкова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь // Доп. НАН Украни. – 2010. – № 7. – С. 7–11.

282. *Дрінь М.М., Дрінь Я.М.* Зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічного псевдодиференціального рівняння з негладкими символами // Proceedings of the Sixteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol.16 (KROMSH - 2005). September 18-29. – 2006. – P.33-37.

283. *Городецький В.В., Дрінь Я.М.* Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами в просторах періодичних функцій // Буковинський математичний журнал. – 2014. – Т. 2, № 1. – С. 54–70.

284. *Городецький В.В., Дрінь Я.М.* Псевдодиференціальні оператори нескінченного порядку в зліченно-нормованих просторах гладких функцій // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – Т. 10, № 2. – С. 96–111.

285. *Городецький В.В., Дрінь Я.М.* Багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 66, № 5. – С. 619–633.

286. *Городецький В.В., Спіжавка Д.I.* Багатоточкова задача для еволюційних рівнянь з псевдобеселевими операторами // Доп. НАН України. – 2009. – № 12. – С. 7–12.

287. *Спіжавка Д.I.* Властивість локалізації розв'язків m-точкової задачі для сингулярних еволюційних рівнянь // Науковий вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. 501. Математика. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. – С. 83–87.

288. *Городецкий В.В., Мироник В.И.* Двухточечная задача для одного класса эволюционных уравнений. I // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 349–363.

289. *Городецкий В.В., Мироник В.И.* Двухточечная задача для одного класса эволюционных уравнений. II // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 4. – С. 520–526.

290. *Городецький В.В., Мартинюк О.В.* Задача Коші та нелокальні задачі для еволюційних рівнянь першого порядку за часовою змінною. – Чернівці: Видавничий дім "РОДОВІД", 2015. – 400 с.

291. Городецький В. В., Мартинюк О. В. Задача Коші та нелокальні задачі для сингулярних еволюційних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Книги – XXI, 2010. – 320 с.

292. *Krzyzanski M.* Sur l'allure asymptotique des potentiels de chaleur et de I'ntegrall de Forier-Poisson // Ann. polon. math. – 1957. – Vol. 3, N 2. – P. 288–289.

293. *Дрожжинов Ю.М.* Стабилизация решений обобщенной задачи Коши для ультрапараболического уравнения // Докл. АН СССР. Сер. матем. – 1969. – Т. 33, № 2. – С. 363–372.

294. *Дрожжинов Ю.М., Завьялов Б.И.* Квазиасимптотика обобщенных функций и тауберовы теоремы в комплексной области // Мат. сб. – 1977. – Т. 102, № 3. – С. 379–390.

295. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976. – 328 с.

296. *Корн Т., Корн Г.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1977. – 832 с.

297. *Левитан Б.И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. – 1951. – Т. 6, вып. 2. – С. 102 – 143.

298. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности задачи Коши // Успехи мат. наук. – 1953. – Т. 8, вып. 6. – С. 3–54.

299. *Городецький В.В., Готинчан Т.І.* Перетворення Бесселя у просторах типу $\overset{\circ}{S}$ // Буковинський мат. журн. – 2017. – Т. 5, № 3–4. – С. 50–55.

300. *Гуревич Б.Л.* Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 99, № 6. – С. 893-896.

301. *Готинчан Т.І., Атаманюк Р.М.* Різні форми означення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 111. Математика. – Чернівці: Рута, 2001. – С. 21–26.

302. *Готинчан Т.І.* Про нетривіальність та вкладання просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 1601. Математика. – Чернівці: Рута, 2003. – С. 39–44.

303. *Городецький В.В., Колісник Р.С.* Оператори диференціювання нескінченного порядку в просторах типу C та їх застосування // Доп. НАН України. – 2004. – № 10. – С. 14–19.